ПРОСТОР-ВРЕМЕ

принципи физике случајности

принцип вероватноће,
информација и ентропија

РАСТКО ВУКОВИЋ

Радна верзија текста!

Растко Вуковић:
ПРОСТОР-ВРЕМЕ, принципи физике случајности

https://www.scribd.com/document/347514158/Principi - Serbian
https://www.scribd.com/document/349336253/Principles - English

Лектори и рецензенти:

Гимназија Бања Лука:
Александра Радић, проф. физике,
Драгана Галић, проф. математике,
Душко Милинчић, проф. информатике.

Горан Дакић, проф. српског језика и књижевности, новинар

Природно-математички факултет
Универзитет у Бањој Луци:
др Зоран Рајилић, физика,
др Душко Јојић, математика,
мр Димитрије Чвокић, информатика.

Предговор

Ова књига је наставак „Информације перцепције“ наведене на крају (в. [2]). Прва верзија „Природа времена“, такође наведена у библиографији, требала је само повезати моје прилоге на исту тему из претходних година, али се прича отела. Добијао сам превише страна, превише филозофије и превише математике. Ко би то читао? Зато сам одлучио да тај први покушај оставим недовршен на интернету (в. [1]) и да урадим нови текст под називом „Простор-време“. Хтео сам задржати неке теореме само описно, а избацити све доказе, евентуално се позивајући на њих. Међутим, није ми ишло тако једноставно.

Тражећи, запео сам на једном нејасном делу између спекулације и науке. Тестирао сам признату стварност помоћу непризнате на помало некоректан начин. Из „нетачне“ физике добио сам „тачну“. Требам ли и ту математичку фантастику сада одбацити? Исказ „из нетачног тачно” је тачан, па испада да је у природи све узрочно-последично али и да није. Заправо, ми нисмо сигурни да је „потпуна узрочност свега у природи“ тачна претпоставка, а да је њена негација коју сам назвао „објективна случајност“ нетачна, па сам остао на новој верзији.

Тражење подршке за тако компликоване и сумњиве пројекте је тежак посао. Сви су негде сврстани и „не баве се тиме”. Један колега ме убедио да превише журим, да се наука пише полако, једно по једно. Други ми је у кафани причао да сваки он будући емеритус, плашен шарлатанством и у сталној борби за академске позиције учећи постаје пренаучен. Иза тога не остаје довољно за развој вештине, а још мање за креативно лутање, никако за фантазирање. Каријера не иде са великим идејама, рекао ми је наздрављајући. Савремено образовање је све више „успешно“ и само је мој проблем што добијамо производе који гаје искрено поштовање према провереним истинама.

Ти си промашио све – причао ми је трећи. Самотњачки рад у науци је неквалитетан и непривлачан и зато чуј шта ти ја кажем: бежи одатле! Успешни следе путоказе „не таласај“ затим „подржавај полако и вагај ка врху“ у славу система и не глуми научног боема који се отима за понеко изненађено „па то није била само фикција“ када наука сазри. Бранио сам се тврдећи да усамљена истраживања у подруштвљеном окружењу имају посебну драж, јер до правих открића нема нацртаних путева. Они са пуно подршке у тој игри откривања са таквима немају шансе! Леонардо да Винчи, Блез Паскал или Никола Тесла су тројица од многих који су успели пркосити академијама. А оних на листи генијалаца који су променили свет има више од успешно образованих. Постоји тајна истина о непобедивости очаја због које су многе амбиције пропале. О томе је писао Владислав Петковић Дис: „И мрак има своје светле стране, мис’о се рађа кад је срећа пуста“. За успех треба ти неуспех.

Тако мучно дођох до овог текста. Заинтересованом читаоцу само могу поручити да има тога још.

Аутор, мај 2017.

Sadržaj

Принципи физике случајности

Увод

Три најважнија узрока физике случајности названа су принципима, односно начелима вероватноће, информације и ентропије. Њима дефинишемо материју, простор и време. Прво од начела почиње сазнањем да се најчешће дешава оно што је највероватније, а затим се наставља теоријом вероватноће којом се овде и не бавимо превише, те физичким последицама којима се савремена наука недовољно бавила.

Друго од тих начела заснивамо на схватању информације као материјалне, стварне, за разлику од неизвесности која је апстрактна. Океан неизвесности је бесконачан, за разлику од веома ограничене (количине) информације која одатле претекне, једва исцури ка нама, у облику супстанце и простор-времена. Из првог начела следи други: природа нам даје минимум информације, при чему дата информација представља оно што зовемо садашњошћу. Колико год је издашна у реализацији највероватнијих догађаја, природа је толико шкрта у стварању садашњости, па ипак тамо где нема тока времена нема ни наше васионе.

Приметићете да је прво начело са овде изложеним последицама тешко, па и немогуће озбиљно оспоравати на било који начин, али да се оно опет чини и веома неприхватљиво. То не сматрам маном, већ напротив својим постигнућем. Друго начело у себи садржи надоградњу основних идеја из моје претходне књиге „Информација перцепције“ наведене на крају које су заправо недоказиве. Пре свега, $\ell = \mathbf{i}\cdot\mathbf{h}$, формула за слободу као (скаларни) производ (вектора) интелигенције и хијерархије. Међутим, као и формула кинематике $vt = s$, она се не да оспорити. На питање „зашто спекулишем са том сумњивом формулом“ имам одговор „нађи ми пример који доказује супротно“.

Треће начело полази од ентропије и другог закона термодинамике: топлота спонтано прелази са тела више на тело ниже температуре. Показује се да је ентропија у ствари један део нечега што се понекад назива њеним именом. Она је количина неизвесности подскупа случајних исхода (насумичног распоређивања) физичког стања који су највише вероватни. Зато што је штедљива са информацијом, природа не расипа неизвесности у оним количинама које релативистичка термодинамика сматра нормалним, па смо се физика и ја морали разићи. И даље остајем сагласан како са класичном термодинамиком тако и са теоријом релативности.

Последице трећег начела сматрам заиста ризичним и оне иду на моју одговорност. Али опет, зар би то било истраживање ако би ишло само провереним путевима?

1.1 Вероватноћа

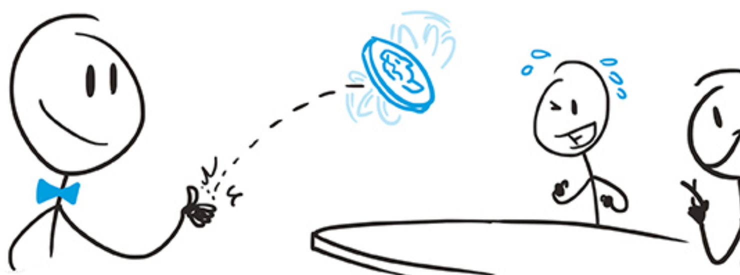
Оно што је највероватније најчешће се и догађа. То је *принцип вероватноће*. Толико је очигледан и једноставан да га математичка теорија вероватноће једноставно прихвата и не коментарише, заправо се и не осврће на њега. Ипак, он носи и дубља значења која вреди разматрати.

Под *случајношћу* у даљем тексту подразумевамо само оне насумичности за које важи принцип вероватноће. Тада имамо бар две непредвидиве могућности које се понашају по правилима теорије вероватноће.

1.1.1 Објективност случајности

Пре свега, може се расправљати о коренима случајности. Када имамо опције чији исходи су за нас непредвидиви, случајни, али негде постоје (један или више) неких узрока нама непознатих или недоступних, онда су њихове реализације *субјективне случајности*. Ако би била противречна претпоставка да постоје крајњи узроци сваког исхода, таква случајности била би *објективна случајност*.

На пример, субјективна случајност је избор цифара броја $\pi = 3,14159265359\dots$ редом. Он ће у првом читању положити све тестове случајности, али ће се у другом и сваком наредном читању показати да су те цифре увек исте, да је у првом била *псеудо случајност* (тобожња случајност).



Slika 1.1: Бацање новчића.

Насупрот многим научним и математичким теоријама ми овде верујемо да поред субјективних постоје и објективне случајности. Пример објективне случајности може бити бацање *фер-новчића* (слика 1.1). Објаснићу то детаљније. Случајни исходи су „писмо“ и „глава“ са шансама пола-пола. У низу од 100 поновљених бацања око 50 исхода ће бити „писмо“, односно „глава“. Међутим, њих ће ретко бити тачно по 50. Наиме, бацања су независни догађаји, у смислу да следеће не памти она претходна, те се могу дешавати дуге серије узастопних истих исхода и зато је резултат само приближно пола-пола.

Тестови случајности предвиђају ову толеранцију. Штавише, они предвиђају не само средњу вредност (50) већ и средње одступање од те вредности (5), од падања „писма“ у низу (100) бацања фер-новчића. У случају нефер новчића или у случају да исходе бацања покушава нагађати човек, лако се може десити да ова средња одступања не буду тачна и да се не прође тест. Међутим, поменуте цифре броја π, извлачене редом као из лото бубња, показаће се савршено „случајне“.

Примере објективне случајности имамо и у ставу да „нема начина да се нешто организује тако да се обухвате и контролишу све могуће последице, а да се искључи

свака непредвиђеност". Или: „Нема гаранције за апсолутну извесност приликом практичне провере било којег од природних закона". То је на корак од *Геделове теореме* о немогућности: „Ма како да имамо велик скуп аксиома и њихових последица, увек ће бити тачних тврђења која се не могу извести из датог скупа". Наиме, (механички) узрок свега не може постојати, јер би био контрадикторан. Све последице таквог узрока чиниле би један скуп исхода изван којег би се увек могао наћи исход који не следи из датог скупа. Укратко, полазимо од следећег става као аксиоме.

Не постоји *узрок свих узрока.* Не постоји скуп узрока свих могућих последица.

Теореме попут Геделове и последица изводе се из чувеног Расел[1]-Зермеловог парадокса из 1901. године, који формално пишемо:

$$\text{Нека је } S = \{A : A \notin A\}, \text{ да ли } S \in S \text{ ?} \tag{1.1}$$

Речима, нека је дат скуп (S) скупова (A) који не припадају сами себи. Да ли такав скуп припада самом себи? Одговор не може бити „да", јер из $S \in S$ и (1) следи $S \notin S$, што је контрадикција. Одговор не може бити нити „не", јер из $S \notin S$ следи $S \in S$, а то је опет контрадикција. Трећег нема, јер постоји и теорема да се свака поливалентна логика („тачно", „можда" или „нетачно") може свести на двовалентну („тачно" или „нетачно"). Дакле, немогућ је скуп који садржи све скупове који себе не садрже, а затим је немогућ и скуп свих скупова. Ако за сваки догађај постоји узрок, онда узрока свих узрока не може бити, а то је закључак до којег нас формално доводи и детерминизам.

Мало лакша верзија Раселовог парадокса је следећа контрадикција: брицо A брије све оне у свом крају који не брију сами себе. Брицо A не може постојати упркос чињеници да је разумније очекивати скупове који нису своји подскупови. Још лакша верзија је тврђење „ја лажем", које је контрадикција. Наиме, ако лажем онда лажем да лажем, а ако лажем онда није истина то што кажем па према томе говорим истину.

Формално, ови парадокси долазе из *алгебре судова* према којој се из истине (тачног) не може добити неистина (нетачно). Сва математика почива на тој простој, за разум понекад тешко прихватљивој тврдњи да је $\top \Rightarrow \bot$ *контрадикција*[2]. Данас знамо да су сви покушаји оспоравања ове чињенице математичке логике пропали.

Доказивање немогућности нечега је честа тема и у самој математици. На пример, ако сам ја на месту A, онда ја нисам на месту B ако је $A \ne B$. Немогућност постојања на месту B била би недоказива. Други пример, не постоји паран број чији квадрат је непаран број.

За разлику од $\top \Rightarrow \bot$, исказ $\bot \Rightarrow \top$ није контрадикција. Из нетачног се може добити тачно. То нам сведоче многи закони физике који се малим или великим скоковима померају ка тачнијим. Пример тога је и математичка теорија детерминистичког хаоса, а чије ћемо ставове овде користити. И сам принцип равноправности савремених демократија је пример повремено тачне употребе нетачности и као такав је већ годинама темељ успешних држава и савременх правних система. Коначно, истинитост импликације $\bot \Rightarrow \top$ дозвољава реализацију објективне случајности, управо зато што дозвољава и њену нереализацију.

Предности које васиона заснована на објективним случајностима материје има покушајмо разумети помоћу Ароуове[3] теореме немогућности. Ароу је помоћу математичке

[1] Bertrand Russell (1872-1970), британски математичар.

[2] На страну наивне приче, рецимо, да би у случају да на свету постоји само чисто и свеприсутно светло оно би својим „одсуством" могло произвести таму.

[3] Kenneth Arrow (1921-2017), амерички економиста.

теорије игара истраживао демократске системе избора тражећи најбољи начин и према његовом резултату из 1950. године не постоји идеалан метод. За то је добио Нобелову награду 1972. године.

На пример, претпоставимо да су гласачи имали три кандидата A, B и C и да су их бирали на следећи начин:

- 45 гласача $A > B > C$ (45 ставља A испред B, а B испред C)
- 40 гласача $B > C > A$ (40 ставља B испред C, а C испред A)
- 30 гласача $C > A > B$ (30 ставља C испред A, а A испред B)

Кандидат A има највише гласова и требао би бити победник. Међутим, ако B одустане, победник ће бити C, јер би тада C имао 70 гласова, а A само 45.

То је једна једноставна демонстрација Ароуове теореме која је својевремено у демократским заједницама направила толики шок да је скривана од јавности. Укратко, за обичног човека, ове теореме (Arrow and Gibbard–Satterthwaite Theorem) и читава прича у позадини говоре да се за избор требају поставити веома високи критеријуми, а онда од понуђених опција, изабрати једну насумично.

Парафразирам, наметање процедуралних правила у демократским изборима квари делотворност. У најбољим намерама са наизглед идеалним фер процедурама, а такође због манипулација, можемо добијати и најгоре резултате. Са друге стране, оно што би наше „добре намере“ својим претераним регулисањемквариле, препуштање коначних одлука пукој објективној случајности дугорочно гледајући поправља.

1.1.2 Аксиоми Колмогорова

Када бацамо фер-коцку имамо шест равноправних могућности, свих шест са истом вероватноћом $\frac{1}{6}$. Када бацамо нефер коцку, вероватноће[4] исхода су можда различити бројеви $\Pr(1), \dots, \Pr(6)$ са збиром 1. Ако вероватноћа да ће пасти „јединица“ или „двојка“ износи $\Pr(1) + \Pr(2)$, кажемо да су „јединица“ и „двојка“ узајамно *независни* случајни догађаји. Тако је шанса у лото игри $n = 2, 3, 4, \dots$ пута већа са n уплаћених комбинација него са једном.

Уопште, нека су дати случајни догађаји $\omega_k \subset \Omega$ (појединих исхода при бацању коцке има $k = 1, 2, \dots, 6$) у простору случајних догађаја Ω (скуп свих $n = 6$ исхода бацања коцке), са коначно $n \in \mathbb{N}$ или бесконачно елемената $n = \infty$ (случајних догађаја). Дакле, унија случајних догађаја је скуп

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} \omega_k. \tag{1.2}$$

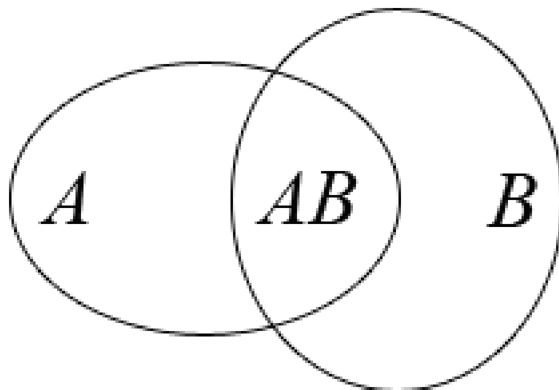
Број $P(\omega_k) = \Pr(\omega_k)$ називамо *вероватноћом* догађаја ω_k. Тада важе аксиоми:

1. $0 \le P(\omega_k) \le 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(\omega_i \cup \omega_j) = P(\omega_i) + P(\omega_j)$, ако је $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$.

То су *аксиоми Колмогорова* за математичку теорију вероватноће. Из природе тих аксиома видимо да унију скупова можемо писати и као збир ($A \cup B$ као $A + B$), а пресек скупова као производ ($A \cap B$ као AB).

---

[4] енг. probability – вероватноћа.



Slika 1.2: Пресек скупова.

Овим аксиомама се додаје и аксиом о адитивности *пребројивих скупова*:

$$P(\sum_{k=1}^{n} \omega_k) = \sum_{k=1}^{n} P(\omega_k), \tag{1.3}$$

када су $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ сви узајамно искључиви догађаји, тј. када је $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$ за сваки пар различитих индекса $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Одговарајући аксиом непребројивих скупова био би

$$P(S) = \int_{\omega \subseteq S} \rho(\omega)\, d\omega, \tag{1.4}$$

при чему је $S \subseteq \Omega$ потпростор *непрекидног простора* (тзв. континуум) свих места ω, случајних догађаја из простора Ω, а $\rho(\omega)$ је густина вероватноће на месту ω.

Догађају $\omega \subseteq \Omega$ супротан је догађај такав да је $\omega \cup \omega' = \Omega$ и $\omega \cap \omega' = \varnothing$, што пишемо кратко као разлику скупова $\omega' = \Omega \backslash \omega$. Када се деси ω онда се није десио ω' и обрнуто, па интуитивно закључујемо да је

$$P(\omega') = 1 - P(\omega). \tag{1.5}$$

Ова једнакост се доказује помоћу Колмогоровљевих аксиома, редом:

$$P(\omega + \omega') = P(\Omega),$$

$$P(\omega) + P(\omega') = 1,$$

а отуда (1.5).

Интуитивно примећујемо да вероватноћа случајног догађаја расте од 0 до 1, што значи да празан скуп има вероватноћу нула и пишемо:

$$P(\varnothing) = 0. \tag{1.6}$$

Исти резултат следи и из аксиома, прво због $\Omega' = \varnothing$, па $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$.

Пример 1.1.1. *Помоћу аксиома Колмогорова доказати:*

1. *ако је $A \subseteq B$ тада је $P(A) \le P(B)$;*
2. *за свако $A \subseteq \Omega$ важи $P(A) \le 1$.*

Доказ. 1. Због $A \subseteq B$ биће $B = A \cup (B \backslash A)$ и $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$. Отуда

$$P(B) = P(A) + P(B \backslash A).$$

Међутим, $P(B \backslash A) \ge 0$, па је $P(B) \ge P(A)$.

2. Из $A \subset \Omega$ следи $P(A) \le P(\Omega) = 1$. □

Помоћу аксиома се може доказати и (1.3), а затим и интегрална верзија (1.4). Поред тога, интересантан нам је и идентитет

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1.7}$$

Ради доказа, приметимо да су случајни догађаји, скупови $A \backslash B$, $B \backslash A$ и $A \cap B$ *дисјунктни*, тј. да немају заједничких елемената, а да је њихова унија $A \cup B$. Затим:

$$P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P(B \backslash A) + P(A \cap B) =$$

$$= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] + P(A \cap B),$$

а отуда следи (1.7).

1.1.3 Квантна спрегнутост

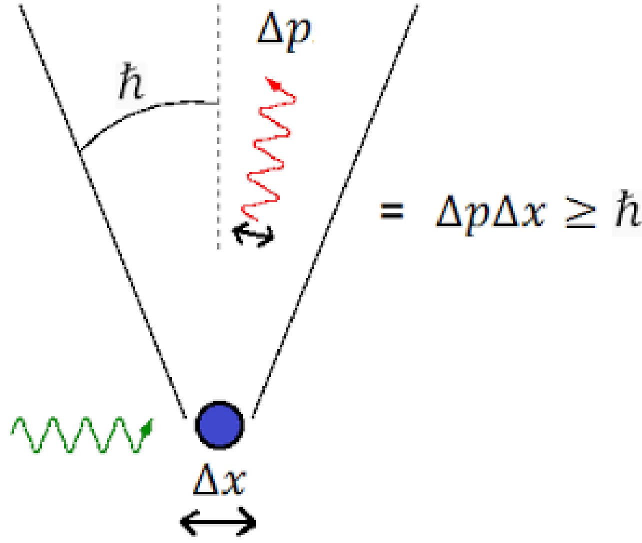
Са становишта теоријске физике потврда објективне случајности је *Белова теорема* из 1964. године (в. [4]). Она утврђује да у квантној механици нема скривених параметара који би могли стајати иза „фантомског деловања на даљину“ које су открили Ајнштајн, Подолски и Розен 1935. године, а које је данас познато као *квантна спрегнутост*. Међутим, та теорема доказује и да не постоји неко или нешто (људи сигурно не) што би могло предвидети случајне догађаје микро-света. Ово значење Белове теореме физика још није препознала (мислим), али јесте следеће.

Квантна спрегнутост настаје при узајамно зависним случајним догађајима. При мерењу импулса p и положаја q честице (рецимо електрона) дуж исте координате, не можемо одредити тачан ни импулс ни положај. Грешке мерења су рецимо Δp и Δq. Хајзенберг је при томе открио да уколико прецизније одређујемо положај (импулс), утолико ће остати неодређенији импулс (положај), тако да је производ ових неодређености већи од *Планкове константе* $h = 6,626 \times 10^{-34}$ Js, тачније

$$\Delta p_x \Delta x \ge \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_y \Delta y \ge \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_z \Delta z \ge \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \Delta t \ge \frac{\hbar}{2}, \tag{1.8}$$

где је $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \times 10^{-34}$ Js редукована Планкова константа. Овде је кориштен *Декартов правоугли систем* координата $Oxyz$ (апсциса, ордината, апликата), па се неодређености импулса и положаја дуж две окомите координате (рецимо апсцисе и ординате) могу неограничено смањивати. То је смисао чувених Хајзенбергових *релација неодређености* због којих је добио Нобелову награду. Импулс и положај (дуж исте координате) су *зависни случајни догађаји*.

Ове релације се могу разумети на примеру посматрања електрона под тзв. Хајзенберговим микроскопом, скицираним на слици 1.3. Да бисмо добили што већу тачност Δx положаја електрона, користимо електромагнетне таласе што краћих таласних дужина, до тврдих γ-зрака. Сударом зраке са електроном открива се положај електрона до таласне дужине зраке $\lambda = \Delta x$. Међутим, зрака мање таласне дужине има већи импулс



Slika 1.3: Хајзенбергов микроскоп.

$p = h/\lambda$, па због закона одржања укупног импулса у овом судару производ неодређености $\Delta p \Delta x$ мора бити пропорционалан са $p\lambda = h$. Отуда следи (1.8). Ову пропорционалност немамо када зрака иде једном Декартовом осом, а импулс меримо другом.

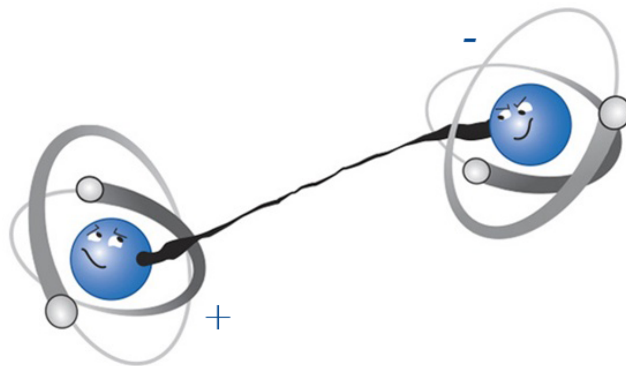
Вероватноћа два случајна догађаја смањује се према (1.7) уколико су ти догађаји више зависни, више спрегнути. Као да природа, штитећи се принципом вероватноће, покушава открити што мање од својих нереализованих веза. Такође, што је извесност случајног догађаја већа он ће се пре реализовати, па се намеће утисак да природа настоји боље скривати своје веће неизвесности.

Примењено на објашњење Хајзенберговог микроскопа, добијамо ново тумачење. Смањивањем таласне дужине светлости смањујемо неодређеност положаја (опаженог) електрона, што значи да повећавамо вероватноћу места његовог налажења. Просто, мање Δx значи веће $P(\Delta x)$. Према томе, Δp_x из (1.8) сразмерно је $P(\Delta x)$ и обрнуто. Хајзенбергове релације неодређености можемо написати у облику

$$a_x P(\Delta x)\Delta x + a_y P(\Delta y)\Delta y + a_z P(\Delta z)\Delta z + a_t P(\Delta t)\Delta t \ge \ell, \tag{1.9}$$

где су a_x, a_y, a_z, a_t произвољне константе збира $2\ell/\hbar$. Број ℓ је (генералисани) константан скаларни производ вектора чије су компоненте вероватноће и вектора чије су компоненте неодређености, овде положаја и времена (догађаја 4-дим простор-времена). Константност овог броја указује на закон одржања укупне „количине“ нереализоване и реализоване случајности. О томе ћемо касније, заједно са информацијом.

Други пример квантне спрегнутости је типичан експеримент којом се она данас доказује. Честица чији је укупни спин нула емитује две честице, рецимо два електрона спина $\pm\frac{1}{2}$ или уместо њих два фотона спина ± 1, на две супротне стране, лево и десно као на слици 1.4. Немогуће је унапред знати која ће отићи лево, али се то може сазнати пропуштањем пристигле честице кроз магнетно поље када ће скретање открити њен спин (плус или минус). Скоро истовремено мери се тада и спин емитоване честице десно. Размак између мерених честица је превелик, а време између мерења прекратко да би било шта (не брже од светлости) стигло од једног мерења до другог. Рецимо,



Slika 1.4: Квантна спрегнутост.

негде на Пацифику креће емисија, а спинови емитованог пара честица се хватају на два краја океана.

Експерименти показују да спинови лево чине случајан низ (позитивних и негативних), што је сасвим очекивано. Међутим, мерени спинови одговарајућих честица десно су увек у пару са левим, што није за очекивати код сасвим случајних догађаја. Када год је један спин позитиван други је негативан и обрнуто. Они тако следе закон одржања (нултог) укупног спина тог система чиме доказују „фантомско деловање на даљину“, други израз за „квантну спрегнутост“.

Трећи пример квантне спрегнутости, који овде наводим, долази од једне добро познате ситуације у физици *судара честица*, која је још увек недовољно схваћена. Посматрајмо неку честицу C, између две њене узастопне интеракције A и B. Нека је A одвајање фотона C из електрона (који прелази са једне на другу љуску атома), а B је судар емитованог фотона са следећим електроном. На путу до другог електрона фотон нема интеракција и до тада немамо сазнања о правцу његовог одласка. Како су случајности објективне, објективна је непредвидљивост догађаја B, па је до тада у одговарајућој мери недефинисан и догађај A.

Тек након догађаја B десиће се одређивање догађаја A. Након изјашњавања будућег догађаја настаје *намештање прошлости* у складу са законима одржања (масе, енергије, импулса, спина). Ако се догађај B никада не деси, тада се не сме десити нити промена понашања A.

Према томе, ток времена није неки узрочно-последични низ дешавања како то обично замишљамо. Догађај који следи није неизбежна дедукција претходног, већ су то две појаве у низу случајних реализација које су могле бити и другачије. Доследно принципу вероватноће, нешто се дешава „сада“, а не „тада“, просто зато што је са становишта датог субјекта тако вероватније. У неком другом тренутку времена истом субјекту ће бити вероватнија његова нова садашњост. То је време, релативни резервоар догађања. Највећу вероватноћу увек има непосредна будућност, а мању даља, као и прошлост. Стабилна прошлост говори о неком облику закона одржања реализоване случајности. Оно што је једном реализовано за дати субјекат остаје непромењиво изван оквира неизвесности почетног узрока.

Слично је и са простором. Ми смо „овде“ и нисмо „тамо“ јер је тако вероватније. Делујући на своју околину мењамо вероватноће тако да резултат може бити да смо негде тамо, али где год да смо тада је то је за нас највероватније место. Свако удаљеније место има мању вероватноћу. Нове дефиниције простора и времена су симетричне и

обе произилазе из принципа вероватноће. Показаће се да је кретање датог субјекта из прошлости ка будућности последица релативно веће вероватноће његове будућности него прошлости, као што ће се опажање кретања датог тела по датој путањи показати последицом релативно веће вероватноће његових будућих него прошлих положаја.

Видећемо да су оваква схватања простора у складу са теоријом релативности. Штавише, принцип релативности ћемо проширити и на принцип вероватноће. Наиме, ако сам „овде" и нисам „тамо", а обрнуто онај „тамо" није „овде", онда нисмо на истом месту и наша релативна опажања вероватноћа нису иста. Друго, оваква схватања простора и времена су у складу са квантном спрегнутошћу. Пре свега зато што квантно спрегнути догађаји представљају узајамно зависне случајне исходе, те није потребно да се први реализује и да тако пошаље сигнал другоме. Нема „аветињског" путовања материјалних сигнала брзинама већим од светлости, а принцип релативности и даље важи. Међутим, нема више поистовећивања интеракције са преносом сигнала. Појаве се могу дешавати (и имати последице) без преноса информације. То су својства материјалног света заснованог на објективној случајности.

Приметимо да поменута својства има светлост чији извор се креће. Оно што се назива Доплеровим ефектом електромагнетних таласа, сада можемо посматрати и као релативна својства вероватноћа простора. Таласе извора који нам стиже видимо са већом *фреквенцијом* (f) и краћом *таласном дужином* (λ), а извор који одлази обрнуто, даје ниже фреквенције и дуже таласе, тако да је

$$\lambda f = c, \tag{1.10}$$

где је $c \approx 3\times10^8$ m/s брзина светлости у вакууму. Међутим, већа (мања) таласна дужина представља такву размазаност фотона по положају, што значи мању (већу) вероватноћу налажења на месту. Кретање извора фотона сматрамо кретањем координатног система у којем је тај извор непокретан.

1.1.4 Борнова вероватноћа

Дуализам детерминизма и случајности огледа се у екстремној доследности природе по питању апстрактних закона, а са друге стране у објективној неизвесности супстанце. Сва материја, простор и време стално настају из неодређености и формирају нашу садашњост и наш ток времена, на објективно случајан начин и то заједно са безусловним подвргавањем свега осталог хладној и непромењивој логици. Колико чудно, толико и корисно запажање. Наиме, ако постулирамо да је случајност објективна и дођемо негде до закључка да она то није, ето инспирације за понеки доказ. То је идеја водиља коју следимо и овде.

Својства честице-таласа, као и свих осталих стања квантне механике, одређујемо *таласном функцијом* положаја $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ и тренутка t

$$\psi = \psi(\mathbf{r}, t). \tag{1.11}$$

Када би број ψ представљао апсолутно тачну вредност материјалног својства које не постоји као апсолутно тачно и био реалан, са тврђењем да је $\psi \in \mathbb{R}$, алгебра квантне механике би имала тешкоће. Зато пишемо

$$\psi = \Re(\psi) + i\Im(\psi). \tag{1.12}$$

Ралнии $\Re(\psi)$ и имагинарни $\Im(\psi)$ део ψ су реални бројеви (из скупа $\mathbb{R}$), а $i^2 = -1$ је квадрат *имагинарне јединице*. За број (1.12) кажемо да је комплексан. Када имагинарни

део не ишчезава, $\Im(\psi) \neq 0$, онда не постоји тачна (мерљива) вредност датог својства, а тада је *модуо* комплексног броја ψ

$$|\psi| = \sqrt{\Re^2(\psi) + \Im^2(\psi)} \tag{1.13}$$

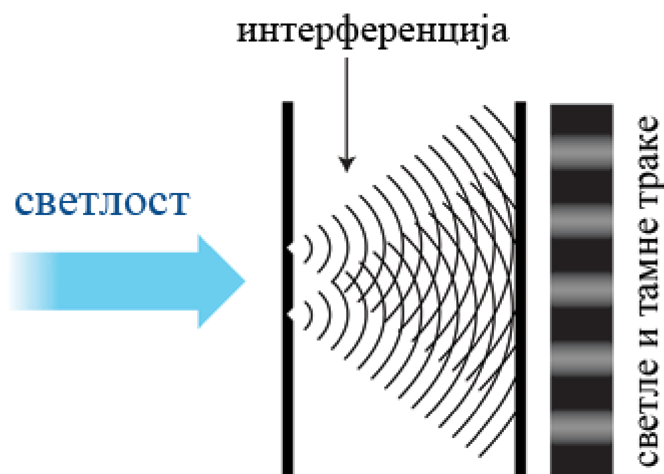
већи од његовог реалног дела.

Јасно је да квантна својства ψ можемо сматрати аргументима (оним променљивим које дефинишу) вероватноће $P(\psi)$. Питање је можемо ли тражити да ψ буде случајни догађај? Тада би таласне функције биле елементи неког „резервоара“ Ω случајних догађаја који би у датој ситуацији обухватао све могуће исходе и за њих би важиле аксиоми Колмогорова. Прва и друга аксиома, свакако, нису спорне:

$$0 \le P(\psi) \le 1, \quad P(\Omega) = 1, \tag{1.14}$$

али трећа тражи појашњење. Два случајна догађаја ψ_1 и ψ_2 су независна ако нису квантно спрегнути, а са друге стране, ако је збир (унија) тих својстава, $\psi = \psi_1 + \psi_2$, случајни догађај који садржи све елементе сабирака. Међутим, већ код *интерференције* фотона видимо да оба захтева није могуће постићи.

На слици 1.5 видимо талас светлости који наилази на препреку са два уска отвора кроз које цуре два таласа који затим интерферирају и падају на заслон, фото-плочу, формирајући на њој светле и тамне концентричне пруге. То је чувени експеримент *два отвора*, који се може радити и са електронима или било којим другим честицама, чиме се показује да су све оне заправо и таласи.



Slika 1.5: Интерференција светлости.

Рекли смо да проласке светлости кроз први и други отвор можемо дефинисати комплексним бројевима ψ_1 и ψ_2 редом, али је питање могу ли исти представљати и одговарајуће случајне догађаје. Они би били независни случајни догађаји када би пропуштањем светлости кроз само један отвор, а затим кроз само други, добили исти резултат као када би светлост пропуштали кроз оба отвора одједном. Као што би резултат бацања једне по једне коцке морао бити исти са резултатом бацања одједном обе. Међутим, експеримент са два отвора показује да се такав резултат не добија.

Сасвим је разумљиво да пропуштањем светлости само кроз први отвор затварањем другог нема интерференције и да је исто обрнуто, пропуштањем светлости само кроз

други отвор. Прилично је разумљиво да акумулирана светлост на заслону након тако селективног првог па другог пропуштања неће дати исту слику као она која би одједном пролазила кроз оба отвора. То ће експеримент и потврдити, због чега морамо одбацити претпоставку да $\psi = \psi_1 + \psi_2$ добро представља случајни догађај сабирака.

Даље нагађамо. Ако је $P(\psi_1)$ вероватноћа падања фотона на дату тачку заслона након пропуштања кроз само први отвор, $P(\psi_2)$ вероватноћа падања фотона на исту тачку након пропуштања кроз само други отвор, и P_{12} вероватноћа појаве фотона на тој тачки услед интерференције, тада је

$$P(\psi_1 + \psi_2) = P(\psi_1) + P(\psi_2) + P_{12}. \tag{1.15}$$

Поставља се питање како дефинисати вероватноће $P(\psi)$ а да буде испуњен овај услов и да важе неспорни (1.14) за функције квантних стања (1.11)? Одговор није јединствен, а једна од једноставнијих таквих функција већ је прихваћена у квантној механици. То је квадрат модула

$$P(\psi) = |\psi|^2, \tag{1.16}$$

коју је предложио Борн[5] 1926. године. Он је 1954. године добио Нобелову награду из физике за „фундаментална истраживања у квантној механици, посебно у статистичкој интерпретацији таласне функције".

Подсетимо се да је $\psi^* = \Re(\psi) - i\Im(\psi)$ конјугован број комплесног броја ψ и да је производ конјуговано комплексних бројева једнак квадрату модула (1.13), тј.

$$\psi^* \psi = \Re^2(\psi) + \Im^2(\psi) = |\psi|^2. \tag{1.17}$$

Зато је:

$$P(\psi_1 + \psi_2) = |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^* (\psi_1 + \psi_2) = (\psi_1^* + \psi_2^*)(\psi_1 + \psi_2) =$$

$$= \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1 = \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_1^* \psi_2 + (\psi_1^* \psi_2)^*$$

$$= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\Re(\psi_1^* \psi_2)$$

и према томе

$$P(\psi_1 + \psi_2) = P(\psi_1) + P(\psi_2) + 2\Re(\psi_1^* \psi_2). \tag{1.18}$$

Упоређујући са (1.15) видимо да је интерферентни сабирак

$$P_{12} = 2\Re(\psi_1^* \psi_2) = \psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1. \tag{1.19}$$

Може се израчунати да је такође $P_{12} = 2|\psi_1||\psi_2| cos\theta$, где је угао θ између комплексних бројева ψ_1 и ψ_2 представљеним векторима у комплексној равни.

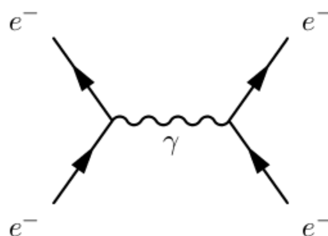
Када је угао $\theta = 0$ тада су комплексни бројеви[6] паралелни, $\psi_1 || \psi_2$, дата квантна својства се поклапају а $|\psi_1 + \psi_2| = |\psi_1| + |\psi_2|$. Модуо збирне особине је збир модула појединих. Са друге стране, највећу разлику између модула збира и збира модула даје угао $\theta = 90^\circ$ када су комплексни бројеви окомити, $\psi_1 \perp \psi_2$, и када нема интерференције, $P_{12} = 0$. Формула Борнове вероватноће (1.16) једнако обухвата све те случајеве, а када нема интерференције даје најмању вероватноћу. Одсуство интерференције значи присуство квантне спрегнутости односно узајамне зависности вероватноћа таласних функција, што треба бити у складу са (1.7).

[5]Max Born (1882-1970), немачки физичар и математичар.

[6]Подразумева се: вектори представљени комплексним бројевима.

Дошли смо до чудног закључка да је интерференција знак независности. То је помало неочекивано, али није неразумљиво. Две честице које се могу сударати, одбијати или привлачити нису независне једна од друге, за разлику од рецимо два фотона која се међусобно игноришу, па интерферирају. Логично? Размотримо то детаљније.

Зашто се уопште честице одбијају? Први савремени пример објашњења погледајмо на слици 1.6 *Фејнмановог дијаграма* одбијања два електрона (e^-) помоћу виртуелног фотона (γ), коме ћемо додати и идеје из ове књиге.



Slika 1.6: Фејнманов дијаграм.

Електрон лево стално повремено емитује виртуелне фотоне (γ), који понекад погађају други електрон (e^-) десно, на слици 1.6. Такви виртуелни фотони су саставни део електромагнетног поља око сваког електрона. Када поменути фотон погоди електрон десно, због закона одржања импулса затвореног физичког система (овде трио: електрон, фотон, електрон), онда се леви електрон одбија лево, а десни десно. Ако је спин електрона лево био $+\frac{1}{2}$, десног $-\frac{1}{2}$, онда је спин фотона могао бити +1 и процес одбијања је у складу и са законом одржања спина. Након размене фотона укупни спин система два електрона опет је исти (нула). Према томе није могућа размена виртуелног фотона између два електрона једнаког спина (спин електрона може имати само две вредности $\pm\frac{1}{2}$, спин фотона само две вредности ± 1).

Није могућа промена импулса, спина, енергије итд. првог електрона након одласка виртуелног фотона све до судара тог фотона са другим електроном. Сада то само понављам и наглашавам. Наш свет се састоји од апстрактно великог (бесконачно бесконачног) контингента неизвесности из којег нам природа због принципа вероватноће као на кашичицу, у најмањим могућим порцијама даје материју, простор и време. Они настају реализацијама неких огромних објективних неизвесности, које су нематеријалне, ванпросторне и ванвременске. Као такве оне не познају наше појмове „сада“, „сутра“ или „јуче“, нити им је битно да ли су за нас нека два догађаја временски удаљена чак и милионима година. Зато ће *виртуелни фотон* тек након судара са другим електроном „наштимати“ импулс, спин, енергију итд. првог, чак и ако би између прве и друге интеракције лежали милиони година, са становишта нас материјалних, са ове стране случајности. Дакле, радимо на теорији у којој и будућност утиче на прошлост. То откриће не би требало да буде по себи одбојно, ако у њему нема контрадикције.

Са становишта класичне физике, када нема објективне случајности па је будућност детерминистички одређена, виртуелни фотон би у тренутку поласка из првог електрона могао тачно знати где и када ће се налазити други електрон, те кренути тамо. Опет нема контрадикције, а нема нити потребе да будућност утиче на прошлост. Међутим, то се противи овде захтеваној објективној случајности.

У обе теорије има смисла говорити и о обрнутом току времена, у свакој на свој начин. Када се из претходног стања највеће вероватноће пређе у следеће стање тада

највеће вероватноће, такође се враћајући назад враћамо у стање онда највеће вероватноће. Делује апсурдно, али није нарушен принцип вероватноће, наравно уз претпоставку да је виђење реалности једног и другог посматрача (помало) различито. То није виђење филмске траке пуштене унатрашке. Зато и у овој теорији има смисла говорити о *позитрону* коме је смер времена супротан од тока времена електрона, па на исти начин као у књигама Фејнмана објаснити привлачење електрона и позитрона.

Како онда њих два, којима време тече у супротним смеровима, могу комуницирати? Питање који би први поставио другом очекујући у свом времену касније одговор, други би доживео након свог одговора. Били би као два стара знанца који унапред могу одговарати знајући тачно шта ће бити питани. То такође није противречно ако помислимо колико су те елементарне честице „глупе“ и колико оне уопште немају потребу да делују планирано организовано.

Завршимо сада причу о експерименту са два отвора. Када пропуштамо један по један електрон кроз оба отворена отвора, без обзира на то како били дуги временски интервали између узастопних пуштања, то неће имати значаја на неизвесности (оне су ванвременске). Електрони *интерферирају* управо зато што су ти догађаји независни. Тамне и светле траке интерференције на заслону биће чак и јасније него када сви електрони крећу ка тим отворима истовремено, када ће се међу електроне умешати и узајамно одбојне електричне силе које ће смањити њихову узајамну независност.

1.1.5 Васиона и хаос

Космос, *васиона*, свемир и универзум су грубо гледано синоними за „бесконачно“ пространство материје, простора и времена које нас окружује. Васиона обухвата разна небеска тела (слика 1.7) попут галаксија, звезда, планета, сателита, комета, поред простора и времена у којем се та тела налазе. Њен нама видљиви део има пречник око 93 милијарде *светлосних година* (дужина коју светлост пређе за годину дана), а сматра се да је настала „великом експлозијом“ (енг. *Big Bang*) пре око 13,8 милијарди година. У свету који почиње са принципом вероватноће, материјалне границе васионе су места где престају случајности. То су или она места тако малих вероватноћа која се скоро никада не реализују или су то места тако великих вероватноћа (због закона великих бројева) да догађаји постају детерминистички.



Slika 1.7: Васиона.

Принцип вероватноће тера природу на стално ослобађање неизвесности, на решавање прво највероватнијих случајних стања па, ако мора, онда и оних мање вероватних. Како су вероватнији догађаји мање неизвесни, то се природа понаша као да штеди своју неодређеност. Она пред нама стално ствара материју, простор и време, шкрто, на кашичицу. Када то приметимо лакше разумемо још једну парадоксалну страну *дуализма* случајности и узрочности: створени свет супстанце је много мањи од њему насупротних апстрактних светова. Он је искра математичких правила која су бесконачно бесконачна.

Из претходног текста је јасно да је наша васиона много више од саме материје, али ваљда и да је она део неког још већег универзума. Питање је: колики део и чега? Другим речима, зашто толико математике треба материји и где је скрива? Сагледајмо део могућих одговора кроз следеће спекулације.

Реализацијом неизвесности настаје наша садашњост (време, простор и материја). Нагомилане садашњости у поретку у каквом су настајале чине нашу прошлост коју ми остављамо иза себе крећући се стално у будућност. Већ смо приметили да кретање неког субјекта из наше будућности у нашу прошлост, који иде из своје прошлости у своју будућност, није у контрадикцији са принципом вероватноће. Чак и ако би такав ишао тачно нашим корацима унатрашке, он би се налазио увек у највероватнијим тада затеченим стањима. Оно што је реализована неизвесност за нас, њему је нереализовани узрок. Наш узрок је његова последица. Закони механике променом предзнака времена остају исти, брзина светлости и њему и нама је иста.

Не важе само принципи теорије релативности тамо као и овамо, већ важе и Хајзенбергове релације неодређености. Када би последица субјекту коме време иде унатрашке у односу на нас била апсолутно тачно дефинисана, онда би и узрок нама био такав, а то би се противило претпостављеној објективној случајности. Не мора сваки закон физике који важи за нас да важи и за субјекта коме *време иде унатрашке*, али би била чудна нека општа несиметрија, изненадна неравноправност таквих перцепција васионе. Ту спадају и могућности других смерова времена (ван истог правца).

Разлике између детерминистичке и ове теорије почињу са малом вероватноћом да би субјект могао проћи уназад кроз исте догађаје којима смо ми прошли. Последица је опет потреба за (проширеном) *теоријом релативности*. Природа би један део такве разноликости могла заташкавати третирајући све елементарне честице (електроне) идентичним, скоро као да на свету постоји само један једини електрон, а онда настаје питање сложених тела. Асиметрије већих количина материје се такође могу правдати законима вероватноће. На пример, покушајмо разумети разлику између укупних количина материје и антиматерије у васиони помоћу *парадокса лифта* (в. [5]).

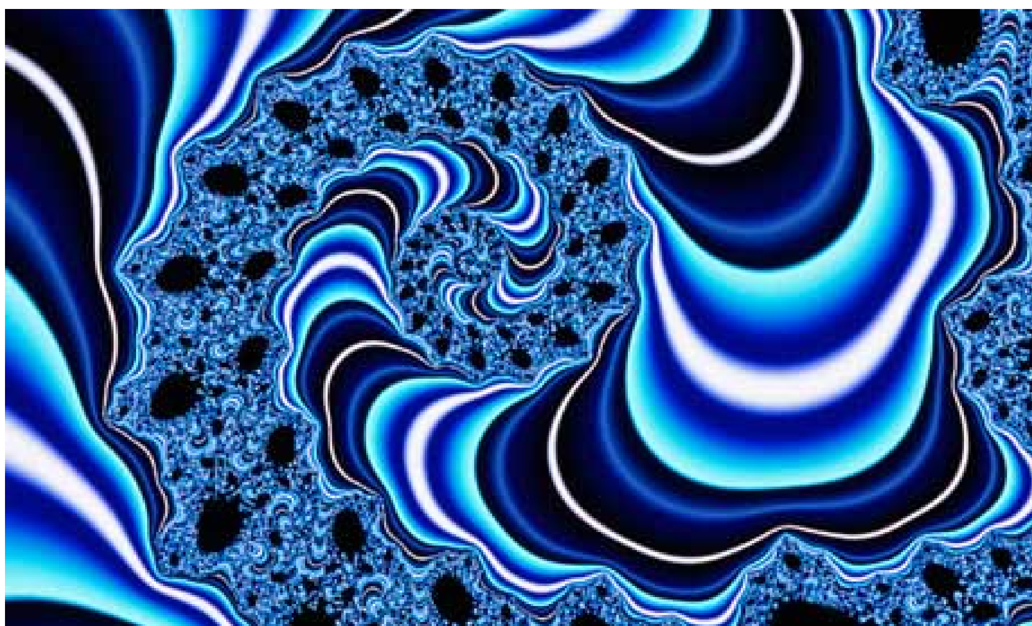
У некој високој пословној згради запосленици имају обичај да помоћу лифта скокну из канцеларије у канцеларију са спрата на спрат. Фреквенција таквих прелаза се смањује ка крајевима зграде, према приземљу и крову, а путник који чека лифт близу тих крајева вероватније треба ићи ка централном делу зграде. Парадокс је у томе што ће такав путник вероватније угледати лифт који иде њему у непожељном смеру, из центра ка крају.

Та незгода путника лифтом постаје згода у случају субјеката којима време тече у супротним смеровима. Било где да смо ближе крајевима васионе изгледније је да више субјеката има исти смер тока времена као ми, него супротан. Приметимо да се овако могу правдати и другачији временски смерови о којима ћемо мало касније.

Из објективне неизвесности настаје материја, простор и време, тако да ми не само да не можемо видети непосредне узроке креације „са оне стране“, већ ти крајњи узроци

објективно и не постоје. Било који субјект у васиони опажа свој сопствени део, увек са истим законима, али никада целину. Он туђа „сопствена опажања“ види релативно, помало другачије. Постављајући узроке Ајнштајнове релативности на вероватноће и одустајући од каузалности у механици уопште, сачувати ћемо слику јединствености и равноправности сваког субјекта у васиони, схватајући боље њене апстрактне делове и везу са материјалним последицама.

Када расправимо почетне проблеме изазване реализацијом случајности, отвара се питање колико нас далеко различитости могу одвести. У суштини имамо две врсте разлика, оне које *конвергирају* као све краћа њихања клатна ка равнотежном положају и оних који *дивергирају* као судбина неког лица и околине након малог покрета окидача пушке, рецимо због убиства конструктора неке касније важне грађевине или напротив терористе. То су дилеме и теорије детерминистичког хаоса.



Slika 1.8: Хаос - ред сакривен нередом.

Теорија хаоса[7] је грана математике која се бави понашањем динамичких система који су веома осетљиви на почетне услове. У оквиру тога „хаос“ се сматра нечим што изгледа насумично, али он то по својој суштини није, јер се негде унутар њега крију правила, повратне петље, понављања, само-сличности, фрактали и само-организовање, које малим променама почетних вредности доводе до великих разлика у крајњим резултатима. У том смислу је написана (в. [8]) чувена реченица о *ефекту лептира* према којој покрет његових крила у Бразилу може бити узрок торнада у Тексасу. Пионир ове теорије Едвард Лоренц[8] дефинисао је хаос (в. [7]) следећом реченицом: „Хаос имате када садашњост одређује будућност, али приближна садашњост не одређује приближну будућност“. Према свему томе, теорија хаоса није тачна основа ове књиге.

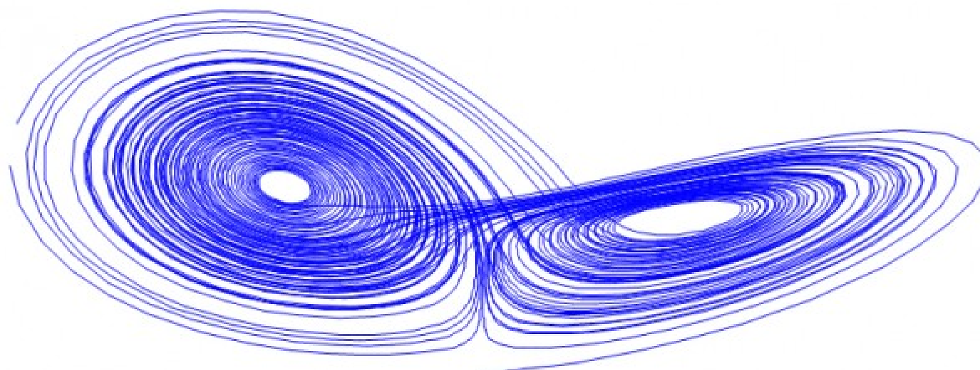
Математичка теорија хаоса, као и вероватноћа, не баве се крајњим узроцима случајности. Оне престају тамо где постаје важно да ли је та случајност објективна или је само субјективна. Довољно им је да за оне форме којима се баве важе закони

[7]Подразумева се: теорија детерминистичког хаоса.
[8]Edward Norton Lorenz (1917-2008), амерички математичар.

вероватноће и уопште логике математике. Већ смо рекли да им то омогућује тачност импликације $\perp \Rightarrow \top$, а ово јер: изван сваке групе истина постоји још истина. Са друге стране, теорија хаоса нам открива корисна правила тамо где их не очекујемо, која је уметник покушао приказати на слици 1.8.

Пример тих корисних резултата је *Ремзијева теорема* коју парафразирам: Увек је могуће наћи неки клише ма како се трудили да ствари замутимо. Ако довољно много насумичних облака прође небом, увек ће бити могуће у њима угледати неко унапред дато лице. Генеришући само насумичне речи у некој књизи, када књига постане довољно опширна, у њој ћете налазити и смислене реченице. Међутим овде нећемо направити логичку грешку па поверовати да је сва случајност саткана само од нужности зато што се у мноштву случајности увек нађу елементи нужности.

Ремзијева теорема је настала пре теорије хаоса. Она је била део *комбинаторике* (теорије распоређивања) и последица Дирихлеовог[9] принципа (ако имате $n \in \mathbb{N}$ кавеза за голубове и $n+1$ голубова, онда ће бар у једном кавезу бити бар два голуба), а данас је честа тема на такмичењима ученика из математике. С обзиром на то да саму комбинаторику многи разумеју као део теорије вероватноће, верујем да ће и Ремзијева теорема слично бити део квантне механике.



Slika 1.9: Чудни атрактор.

Теорија хаоса је настала на још дубљем тражењу правилности од Ремзијевих. Она открива занимљиве цикличне стабилности (еквилибријум) у нестабилним системима. Стабилности као скупови вредности ка којима системи еволуирају са широког спектра почетних услова називају се *атрактори*. Грубо разврстане, све те врсте стабилности делимо на статичне и динамичне. Када се систем развија у такве, прве називамо просто атракторима, а друге страним или *чудним атракторима*.

На пример, замислимо неки градић са 10.000 становника. За смештај својих житеља градић има једну робну кућу, вртић, школу, библиотеку и три богомоље. Инфраструктура им је довољна и људи живе у равнотежи. Међутим, нека компанија одлучи да на предграђу отвори фабрику која би могла да запосли још 10.000 људи и да нагло развије град за смештај 20.000 становника. Зато се ради на отварању још једне робне куће, па још једног вртића, школе и библиотеке и још три богомоље. Инвеститори циљају на нову равнотежу коју називамо атрактор.

Даље замислимо да уместо доласка нових 10.000 људи на постојећих 10.000, град

[9] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), немачки математичар.

напусти 3.000 и у њему остане само 7.000 житеља. Шефови продаје из робне куће процене да њихове продавнице могу опстати само са бар 8.000 муштерија, па их крену затварати. У међувремену потражња порасте и нека друга компанија одлучи да изгради супермаркет, надајући се да ће тако привући нове људе. То се и деси, али многи већ одсељавају и нови супермаркет не мења њихове намере. Компанија држи радње отворенима још годину дана, а затим дође до закључка да нема довољно купаца и поново их затвори. Људи одсељавају, али потражња опет расте. Неко трећи отвори трговачки центар. Људи се почну враћати, али не у довољној мери. Радње се поново затварају. Процес отварања и затварања тече и даље, чиме сам процес постаје неко стање динамичке равнотеже коју називамо чудни атрактор[10] (в. слику 1.9).

Разлика између обичног и чудног атрактора је у томе што први представља стање у које се систем коначно смешта, а други представља врсту путање којом систем иде од ситуације до ситуације без коначног смиривања. *Поенкаре-Бендиксонова теорема*[11] каже да *страни атрактор* може постојати само у системима са три или више димензија, или у две димензије ако простор није еуклидски.

Физички системи могу тежити и динамичким равнотежама зато што простор има три димензије (дужину, ширину, висину). Тамо где се формирају дводимензионално они постају статични. На пример, еволуција живота на Земљи може бити у динамичкој равнотежи, као и развој саме васионе. Напротив, пахуљице снега се развијају у статичне 2-Д[12] кристале. Атрактор је и *таласна функција* која представља таласе материје квантне механике.

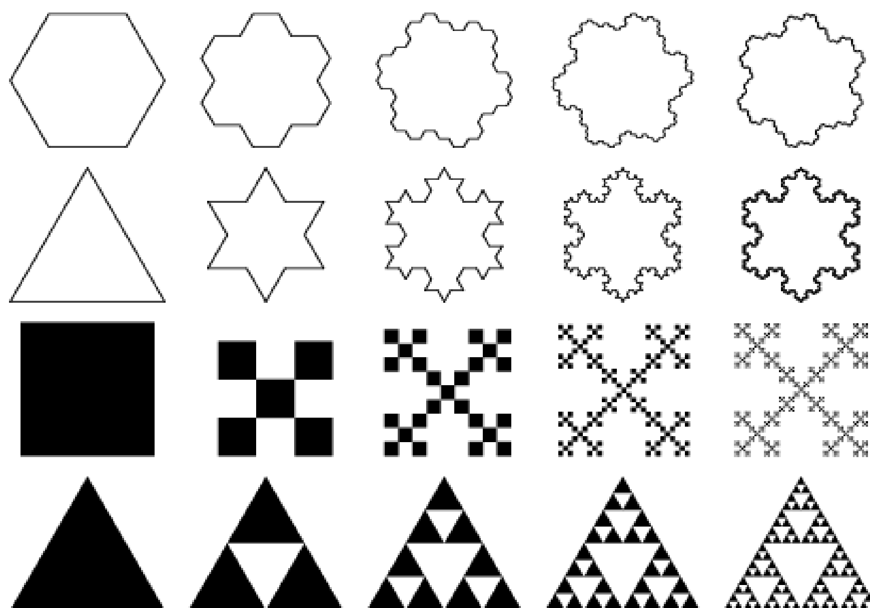
Када велики број честица формира шару која је скоро једнака почетним опцијама поједине честице, тада говоримо о *само-сличности*. Она такође може бити статична (попут пахуљице) или динамична (попут атома), изражена у понављању облика или понашања на различитим нивоима сложености. Не као идентична копија, већ као варијација исте основе, попут *фрактала*[13] на слици 1.10.

Фрактали су врста понављања по дубини микро-макро света (в. [8]). Слично другим атракторима, они игноришу крајње узроке случајности и доводе нас у илузију да су одговарајући циклуси свугде присутни и увек настављиви. Подсећају на рационалне бројеве у скупу реалних бројева. Када се из скупа реалних бројева избаце ирационални, преостали рационални бројеви (разломци) писани у децималном облику увек ће имати један коначан низ цифара које се бесконачно понавља. На пример децимални број $0,131313\dots$ једнак је разломку $13/99$. За разлику од њих, ирационални бројеви су они који никако нису периодични.

Аналогно, бесконачна понављања фрактала су немогућа, јер је васиона ограничена, објаснимо још једном, због закона великих бројева: „Понављањем у истим условима, фреквенција случајног исхода постаје све више једнака вероватноћи тог исхода“. На пример, у 18. и 19. веку примећено је да је на великом узорку однос мушких и женских новорођенчади константан. При томе, број дневно рођене мушке и женске деце није уједначен, већ се тек у дужем посматрању тај однос почиње стабилизовати.

Због закона великих бројева све веће ствари у васиони од сасвим случајних постају сасвим неслучајне, али и обрнуто, смањивање у микро-свет има свој крај у објективној случајности. Због тог закона и зато што не живимо у микро-свету, имамо илузију детерминизма. Уобичајено погрешно верујемо да материја која нас окружује и простор

[10] енг. strange attractor - чудни атрактор, мамац.
[11] Poincaré–Bendixson Theorem
[12] Пишемо кратко „2-Д“ уместо „дводимензионалан“.
[13] Fractal: http://mathworld.wolfram.com/Fractal.html



Slika 1.10: Фрактали.

у сваком тренутку садашњости имају само један могући наставак ка будућности.

1.1.6 Димензије

Чак нам и свакодневица нашег макро-света понекад показује да се на егзактна предвиђања будућности не вреди ослањати. Вагајући аргументе за-и-против апсолутне предодређености пре или касније морамо доћи до најтврђих упоришта детерминизма у науци уопште, а то су класична Њутнова[14] механика и Ајнштајнова релативност. Због сумње у такве поставке било је згодно у књизи [2] оживети Урисонову дефиницију димензије.

Према Урисоновој дефиницији димензије[15] број димензија тачке и коначног скупа тачака је нула ($n = 0$). Скуп тачака је димензије $n+1$ ако и само ако се може раздвојити неким његовим подскупом бар димензије $n = 0, 1, 2, \dots$. Ако такво раздвајање није могуће, дати скуп је димензије $n + 2$ или веће.

На пример, права линија се у једној тачки може пресећи на два дела (две полуправе) и то је фигура[16] најмање димензије која може извршити такву поделу. Према томе, права има димензију један, јер тачка има димензију нула. Раван се може преполовити (најмање) једном правом (на две полуравни), јер раван има димензију два. Простор (дужина, ширина и висина) има димензију три, јер се може поделити једном равни а не може фигуром са мање од две димензије. Када би *простор-време* имало „само“ четири димензије (три просторне и једну временску), као што је то у случају Минковског[17] модела рађеном за потребе теорије релативности, тада би садашњост која садржи сав (3-димензионални) простор васионе у тренутку „сада“ могла поделити васиону на њену

[14] Isaac Newton (1642-1727), енглески математичар и физичар.

[15] Урисонова дефиниција је мало другачија, тополошка, али опет индуктивна.

[16] У геометрији фигуром називамо било какав непразан скуп тачака.

[17] Hermann Minkowski (1864-1909), математичар немачко-јеврејског порекла.

прошлост и будућност. Такво нешто је могуће само у инерцијалним системима.

Да се у инерцијалном систему сатови могу синхронизовати показао је Ајнштајн већ у свом раду из 1905. године (в. [3]). *Синхронизација сатова* значи такво успостављање времена на датом простору које ће се мењати мало-по-мало, кажемо и непрекидно или континуално, са непрекидном променом положаја. Добијени издвојени континуум простор-времена је садашњост датог простора. Он је „сада“ тог простора, „залеђени“ тродимензионални исечак простор-времена. Доследно даље, из чињенице да се сатови у инерцијалним системима могу синхронизовати и Урисонове дефиниције димензије, следи да се садашњост тих система налази у четири димензионалном простор-времену. То „сада“ се мултиплицира, пружа дуж нове координате - трајања.

Инерцијални системи су они системи координата који су везани (мирују у односу на) за тела у једноликом праволинијском кретању. То су тела у *инерцијалном кретању* на која (можемо тако сматрати) не делују вањске силе и која због тога не осећају убрзања. Зато можемо рећи да је (приближно) инерцијалан систем и онај везан за тело које слободно пада у (слабом) гравитационом пољу. То је само „приближно инерцијалан систем“, јер гравитација привлачећи тело по једној оси стишће га бочно. Гравитација масивних звезда издужује тело усисавајући га, тако да се оно у слободном паду ка њој више не може третирати као да је у инерцијалном систему, бар не у смислу да то тело не осећа вањске силе.

Дакле инерцијални системи простор-времена имају четири димензије. Када би постојао само један инерцијални систем онда би васионом владао *детерминизам*. Сви догађаји били би предодређени, јер би постојао само један правац промена. Постојала би само једна временска оса којом би се развијала садашњост, а то „сада“ би опет у сваком тренутку делило нашу прошлост од наше будућности. Васиони којом би владао детерминизам не би требао принцип вероватноће. Он би био илузоран, привремен или бесмислен. Међутим, у свету у којем смо постоје и неинерцијални системи, а такве је немогуће ставити у само четири димензије.

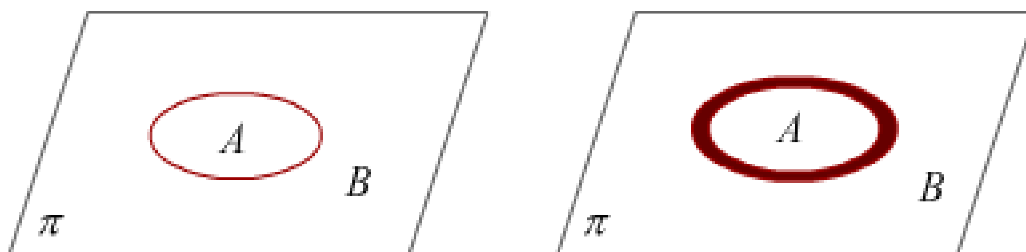
На пример, у систему који *ротира* није могућа синхронизација сатова. Док Декартов систем координата $Oxyz$ ротира око z-осе, све даље тачке од те осе се крећу све брже, свака по својој кружници ротације, са све споријим током времена (релативно у односу на непокретне тачке z-осе). Када синхронизујемо сатове идући у једном смеру ротације дате кружнице, десиће нам се велики скок времена након обиласка целе кружнице и доласка на почетак. Тај ће скок бити већи са већим полупречником кружнице, али и са већом угаоном брзином ротације система. Ова иначе позната немогућност синхронизације сатова сада указује на немогућност дефинисања 3-Д садашњости за одвајање свих будућих од свих прошлих догађаја датог посматрача. Другим речима, према Урисоновој дефиницији димензије, систем који ротира не може стати у простор-време са четири димензије.

Такође, нити инерцијални системи који би се кретали различитим релативним брзинама (сваки у једнолико праволинијском кретању) и који би због тога имали различиту брзину временског тока, не би могли стати у четири димензије простор-времена, али то није тако очигледно као у примеру ротације. Исто је мало јасније у примеру централно симетричне гравитације, какву ствара планета или звезда. Радијално привлачење ка центру гравитације (планете), које расте са приближавањем центру, ствара све већи отклон временске осе од вертикале (која се поклапа са вертикалом само у одсуству гравитације и кретања). Отклони временских оса различити су у различитим тачкама око центра, а сви су усмерени ка центру те их није могуће распоредити без (најмање) три димензије времена.

Узгред приметимо да додатне димензије времена о којима овде причамо нису оне додатне димензије простора са којима ради теорија струна[18]. Друго, рећи да можемо (морамо) дефинисати додатне димензије времена још увек не значи да те димензије имају јаке везе са свакодневном неизвесношћу. Ту празнину у претходном објашњењу попуњава следећи пример повезујући случајност, ерозију и додатне Урисонове димензије. Напомињем да *ерозије* као последице случајности могу дивергирати (ефекат лептира - теорије хаоса) и конвергирати (ка стабилном стању), али да су просечно деструктивне.

Замислимо да је део простор-времена унутар неке атмосфере ограђен зидовима који потпуно одвајају унутрашњост (тог затвора) од спољашњости. Цигле, камен или други употребљени грађевински материјал има три димензије простора и такође трајање, што значи да има бар четири димензије. Претпоставимо да ови зидови неће бесконачно трајати, него да ће због ерозије пре или касније попустити. Те четири димензије тада не раздвајају простор-време, што значи да оно има више од пет димензија.

Претпоставимо обрнуто: поменути зидови ће бесконачно трајати, остаће непромењени због одсуства ерозије или других фактора деструкције, онда опет према Урисоновој дефиницији простор-време не мора имати више од четири димензије, колико имају зидови затвора. Дакле, ерозија као низ насумичних дешавања која руше структуру материјала захтева више од четири димензије простор-времена.



Slika 1.11: Затворена кружна линија и прстен у равни π.

На слици 1.11 видимо нешто аналогно у 2-Д равни π. Лево је затворена кружна линија (димензије један) која потпуно одваја област A од области B те равни, а десно је прстен (димензије два) који чини исто раздвајање. Међутим, линија лево је фигура (нај)мање димензије која може одвојити област A од B равни π. Прстену десно одговарају 4-Д зидови затвора који, у случају да не трају довољно, указују на постојање више од пет димензија простор-времена.

Три димензије времена, заједно са три димензије простора, нису само последица, већ су и претпоставка егзистенције објективне случајности. Као што смо видели, оне су у извесном смислу и последица принципа вероватноће. Пошто о њима сазнајемо помоћу математичке дедукције, оно што називамо Васионом морамо сагледавати са једне стране помоћу непредвидљивости, рецимо материјалног дела света, а са друге стране помоћу закона логике којима се подвргава све остало. Васиона је само онај део Универзума о којем овде желимо имати неку представу.

1.1.7 Специјална релативност

Због нама великог значаја *специјалне релативности*, коју је Ајнштајн објавио 1905. године под називом „Електродинамика тела у кретању“ на немачком (в. [3]), осврнућемо

[18] String Theory: `http://superstringtheory.com/`

се на главне резултате те теорије из угла принципа вероватноће и до сада уочених последица. Прво је ново виђење простора. Дато тело је ту где је зато што му је његово становиште највероватније. Оно има другачија опажања других места од тела која се на тим местима налазе, као и обрнуто, а једну од таквих разлика познајемо за тела у инерцијалним кретањима.

Уобичајене претпоставке које ћемо и овде подразумевати су следеће. Једно тело мирује у инерцијалном систему координата K, а друго у систему K'. Други систем се креће једнолико праволинијски брзином v у односу на први, а оба су представљени Декартовим правоуглим координатама $Oxyz$ и $O'x'y'z'$ редом први и други. Узимамо да се у почетном тренутку $t = t' = 0$ осе система поклапају, $K \equiv K'$, а да се кретање дешава дуж апсциса (x и x' осе). *Сопствени посматрач* је онај који дату појаву види у мировању, *релативни посматрач* је види у кретању.

Даље радимо неуобичајено. Вероватноћу положаја простора процењиваћемо помоћу таласне дужине неког произвољно изабраног фотона (електромагнетног таласа). Када се извор фотона налази (у мировању) у систему K', његова сопствена таласна дужина је $\lambda_0 = \lambda'$, а релативна, виђена из система K нека је λ. Из претходних разматрања је јасно да опажена *таласна дужина* (λ) може зависити и од брзине (v) и од смера кретања извора у тренутку посматрања. Затим претпостављамо да постоји нека функција ($\gamma > 1$) која зависи од брзине v таква да је *просечна* таласна дужина

$$\lambda = \gamma\lambda_0 \tag{1.20}$$

и да је $\gamma = 1$ када је $v = 0$. Наиме, већа таласна дужина значи већу размазаност фотона на дужем интервалу и према томе мању вероватноћу његовог положаја. Први посматрач остаје у свом систему (K) јер му положаји другог (K') изгледају као стања са мањим вероватноћама.

Ако вероватноћа честице из K да остане у свом систему износи P, онда јој је вероватноћа $P' = P/\gamma$ да буде у K'. Вероватноћа да се деси скок из K и K' свих $n \to \infty$ честица тела пропорционална је броју $(1/\gamma)^n \to 0$, па то у теорији вероватноће постаје еквивалент *немогућем догађају*. Зато важи Њутнов *закон инерције*: свако тело остаје у стању мировања или једноликог праволинијског кретања све док на њега не делује неко друго тело или сила.

Уопште за све таласне појаве (морске таласе, звук, светлост) је производ таласне дужине и *фреквенције* једнак *брзини таласа*, па је у овом случају

$$\lambda f = c, \tag{1.21}$$

где је $c \approx 3 \times 10^8$ m/s *брзина светлости* у вакууму. Из теорије релативности знамо да брзина светлости (електромагнетних таласа) не зависи од брзине v извора светлости. Смењујући (1.20) добијамо

$$f = f_0/\gamma. \tag{1.22}$$

Просечна релативна фреквенција (f) фотона је мања од сопствене (f_0).

Како је фреквенција број трептаја у јединици времена, долазимо до закључка да је релативно време спорије од сопственог. Опажени релативни интервал времена Δt је

$$\Delta t = \gamma\Delta t_0, \tag{1.23}$$

ако је Δt_0 одговарајући сопствени интервал. Добили смо познату релативистичку

формулу за *дилатацију времена*, при чему је

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.24}$$

Потсетимо се да је:

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots, \quad \frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots, \tag{1.25}$$

где не пишемо четврте и више степене броја $\frac{v}{c} \to 0$ када су занемарљиви. То су Маклоренови развоји ових функција (коефицијената) у редове.

Ови закључци су већ на први поглед толико убедљиви да их је веома тешко оспоравати, али они су у физици сасвим нови па ћемо их разматрати са разних страна. У наставку полазим од запажања о квантној спрегнутости овде започетих Хајзенберговим релацијама неодређености (1.8), а затим даље на другачији начин. Скаларни производ ℓ, најмању вредност неодређености (1.9), сада пишимо

$$\ell = \Delta p_x \Delta x + \Delta p_y \Delta y + \Delta p_z \Delta z - \Delta E \Delta t, \tag{1.26}$$

са истим значењем као тамо. Јасно је да ова „генералисана неодређеност“ ℓ не зависи од релативне брзине v система K' у односу на систем K, а знамо да је производ окомитих неодређености импулса и положаја нула.

Пример 1.1.2 (Лоренцове трансформације)**.** *Показати да је*

$$\begin{cases} \Delta p_x' = \gamma(\Delta p_x - \beta \Delta p_t) \\ \Delta p_t' = \gamma(\Delta p_t - \beta \Delta p_x), \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta \Delta ct) \\ \Delta ct' = \gamma(\Delta ct - \beta \Delta x), \end{cases} \tag{1.27}$$

где је $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$. *Са* $\beta = \frac{v}{c}$ *ово постају Лоренцове трансформације.*

Доказ. Неодређеност (1.26) је иста у оба система K и K', па имамо:

$$\ell' = \Delta p_x' \Delta x' - \Delta p_t' \Delta ct' =$$

$$= \gamma(\Delta p_x - \beta \Delta p_t) \cdot \gamma(\Delta x - \beta \Delta ct) - \gamma(\Delta p_t - \beta \Delta p_x) \cdot \gamma(\Delta ct - \beta \Delta x)$$

$$= \gamma^2(1-\beta^2)(\Delta p_x \Delta x - \Delta p_t \Delta ct) = \ell,$$

јер је $\Delta p_x \Delta ct = \Delta p_t \Delta x = 0$. Из инваријантности, $\ell' \equiv \ell$, следи $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$, што је и требало показати. Интерпретација Лоренцових кретања даје $\beta = \frac{v}{c}$. □

Приметимо да у примеру не дајемо посебну вредност релативистичком коефицијенту гама (1.24) нити користимо претходних пар резултата, већ претпостављамо *симетрију* у начину трансформисања неодређености импулса и положаја (1.27). То радимо зато да бисмо коефицијент γ могли интерпретирати слично и у анализи опште теорије релативности.

Још важнија напомена је да претходни интервали Δx и даље, нису растојања која уобичајено користимо у динамици (теорији релативности), већ су то неодређености положаја узете из квантне механике. Па ипак, знамо да, Лоренцове трансформације важе и за растојања и за саме Декартове правоугле координате:

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x), \tag{1.28}$$

претпостављених система K и K'. Отуда на познат начин добијамо да дужину штапа у кретању видимо краћом него у мировању.

Пример 1.1.3 (Контракција дужина)**.** *Показати да је релативна дужина у правцу брзине v и окомито на брзину, редом:*

$$\Delta r_{\|} = \Delta r_0/\gamma, \quad \Delta r_{\perp} = \Delta r_0, \tag{1.29}$$

где је Δr_0 одговарајућа сопствена дужина.

Решење. У Лоренцовим трансформацијама (1.28) изаберимо два места на апсцисама и формирајмо сопствену $\Delta r_0 = x_2' - x_1'$ и релативну дужину $\Delta r_{\|} = x_2 - x_1$ истовремено, $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$. Отуда прва једнакост. Другу добијамо аналогно, када бирамо дужине на ординатама (y-осама), или апликатама (z-осама). □

Релативна и сопствена опажања вероватноћа, брзине протицања времена, дужина у правцу кретања, па и самог кретања, различита су у два система. Ипак су то премалене разлике да би нам биле неопходне нове димензије времена. Лоренцове трансформације се односе само на инерцијалне системе у којима можемо занемарити деловање ваљских сила, а без сила нема потребе за додатним временским димензијама. Међутим, тада смо на корак од других феномена који иду заједно са силама.

Схватимо ли Њутнову инерцију буквално као *лењост тела*, онда очекујемо да релативна маса m тела расте са успоравањем времена, односно да је

$$m = \gamma m_0, \tag{1.30}$$

где је m_0 сопствена маса (лењост) датог тела. Импулс тела $p = mv$ је производ његове масе и брзине. Овакво повећање масе можемо разумети повећањем енергије тела за износ потрошене енергије у процесу повећања његове брзине. Тако је укупна (релативна) енергија

$$E = \gamma E_0, \tag{1.31}$$

где је E_0 енергија коју је тело имало у мировању. Упоређујући ово са оним што знамо из класичне физике, да је кинетичка енергија тела E_k једнака разлици укупне енергије коју тело има при транслациији брзином v и енергије тог тела у мировању:

$$E_k = E - E_0 = (\gamma - 1)E_0 \approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}E_0, \tag{1.32}$$

где користимо апроксимацију (1.25), а затим и $E_k = \frac{1}{2}m_0 v^2$, добијамо $E_0 = m_0 c^2$ у сопственом стању, а затим уопште:

$$E = mc^2, \quad p^2c^2 = E^2 - (m_0c^2)^2. \tag{1.33}$$

Прва је позната релативистичка формула која повезује енергију датог тела са његовом масом и брзином светлости, а друга се добија из ње.

Пример 1.1.4 (Енергија помоћу импулса)**.** *Показати да је друга формула у (1.33) тачна.*

Решење. То следи из $p = \gamma m_0 v$, затим:

$$p^2c^2 = \frac{m_0^2 v^2\, c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 \frac{v^2}{c^2}\, c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)c^4 + m_0^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

$$p^2c^2 = -m_0^2c^4 + (mc^2)^2,$$

а отуда тражени резултат. □

Добро су нам позната тачнија (и опширнија) извођења ових формула унутар специјалне теорије релативности. Оно што нам је овде потребније је њихова веза са случајношћу. На пример, помињали смо две врсте граница васионе. Једна је у веома великим телима (закон великих бројева и почетак детерминизма), а друга је у веома малим (престанак сваке извесности). Али сада видимо да су и прва и друга границе са (скоро) бесконачним енергијама. Прва је рецимо хоризонт догађаја црне рупе, а друга је у веома великим енергијама потребним да се досегну веома мале вредности. Као да је наша васиона енергетска празнина, *вакуум* у нечему.

1.1.8 Сила

Када тело осећа дејство силе оно се не креће инерцијално (појам „инерцијално” је овде мало ширег значења од званичног) Лоренцове трансформације силе сматрамо непоузданим. Специјална теорија релативности заједно са Лоренцовим трансформацијама је ограничена на инерцијална кретања код којих тела не осећају дејство сила и, најблаже речено, њихову употребу у ширем контексту треба пажљиво разматрати. Познати парадокси специјалне теорије релативности настају, сада наглашавам, због мешања силе са инерцијалним кретањем.

Парадокс близанаца је један такав пример. То је једнократно уплитање силе у ефекте дилатације времена специјалне релативности. Први од браће близанаца остане на Земљи, а други космичким бродом отпутује једнолико праволинијски до неке далеке тачке у васиони, а затим се такође инерцијално врати назад на Земљу. Док се тамо и назад кретао неком константном брзином у односу на првог брата, други је спорије старио сагласно дилатацији времена (1.23). Међутим, према принципу релативности, свеједно је рећи који се кретао тим једноликим брзинама, па би у односу на другог брата и први требао бити млађи сагласно истој дилатацији. Парадоксално је што су на крају два брата на Земљи са наизглед противречним тумачењима.

У овом парадоксу се једнократно појављује сила, потребна за окретање смера брзине другог брата, када његово кретање није било инерцијално. Док други брат одлази са Земље време му тече спорије (од времена првог брата) и он све више заостаје у прошлости. У обрнутом смеру, док се приближавао првом, опет му је време текло спорије али је он тада бивало у будућности све ближој првом што је прилазио ближе, да би се у тренутку стизања на Земљу њихове садашњости изједначиле. То значи да се приликом једнократног дејства силе, за окретање смера брзине за 180°, смањио један временски период живота, али само другог брата релативно у односу на првог.

Сила је вектор $\mathbf{F}$ са правцем, смером и интензитетом који се може употребити за добијање (инфинитезималног) корисног рада dE на (инфинитезималном) путу $d\mathbf{r}$, према релацији

$$dE = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{1.34}$$

Рад је скаларни производ вектора силе и пута. Ова релација је израз закона одржања енергије и у том смислу је општија од Лоренцових трансформација. Ми те трансформације за сада игноришемо, али и даље користимо ознаке K и K' за два инерцијална система који се крећу узајамном брзином v.

Компонента релативне силе $F_{||}$ паралелна вектору брзине $\mathbf{v}$ мора бити у складу са релативном дужином $dr_{||}$ и енергијом dE из формуле (1.34). Отуда прва од формула:

$$F_{||} = \gamma^2 F_1, \quad F_\perp = F_2. \tag{1.35}$$

Друга једначина даје релативну компоненту $F_\perp$, окомиту на смер кретања. Одговарајуће компоненте сопствене силе су F_1 и F_2. То је тумачење које овде промовишемо, иако је оно прилично обрнуто од данас познатог.

На пример, нека су тела маса m_1 и m_2 на фиксираној међусобној удаљености r. Из Њутнове механике знамо да се она узајамно привлаче *гравитационом силом*

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.36}$$

где је $G = 6,674 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} *гравитациона константа*. Ако су та два тела у систему K', постоје два екстремна опажања из K, када су тела на правцу вектора брзине и када су окомита на тај правац. Због контракције дужине само у правцу брзине (1.29), добијамо за одговарајуће компоненте гравитационе силе сагласност са (1.35). Очигледно је да исти закључак важи за све привлачне или одбојне силе које опадају са квадратом удаљености. Одступања од овог сматраћемо последицом нашег недовољног познавања природе сила, местима где физику треба поправљати.

Размотримо сличан резултат, сада за производ масе и убрзања ($\mathbf{F}_0 = m\mathbf{a}$) релативно у односу на промену импулса временом ($\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$). За честицу масе m имамо:

$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{p}}{m} = m\left(\frac{1}{m}\frac{d\mathbf{p}}{dt} - \frac{\mathbf{p}}{m^2}\frac{dm}{dt}\right) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \frac{\mathbf{p}}{m}\frac{dm}{dt}. \tag{1.37}$$

Узели смо у обзир да се маса убрзане честице мења, а вектор убрзања $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ је однос вектора брзине и времена. Поред тога, вектор импулса је производ масе и брзине, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Према томе, сила дефинисана као производ масе и убрзања, није исто што и сила $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ као промена импулса временом. У наставку прву третирамо као „сопствену“ а другу као „релативну“.

Употребљавамо релативистичке релације (1.33) у којима се не појављује брзина (експлицитно). Из друге имамо $E^2 - p^2c^2 = \text{const}$ одакле узимамо извод:

$$2E\frac{dE}{dt} - 2\mathbf{p}c\cdot\frac{d\mathbf{p}c}{dt} = 0, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{E}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}c^2 = \frac{\mathbf{p}}{E}\cdot\mathbf{F}c^2.$$

Уврстимо у (1.37) и добијамо:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{p}c}{E}\frac{\mathbf{p}c}{E}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{v}}{c}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{F}\right). \tag{1.38}$$

Силе $\mathbf{F}_0 = m\mathbf{a}$ and $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{p}$ нису исте, али се могу раздвајати на по две компоненте, паралелну брзини и окомиту на брзину. Коначно, из

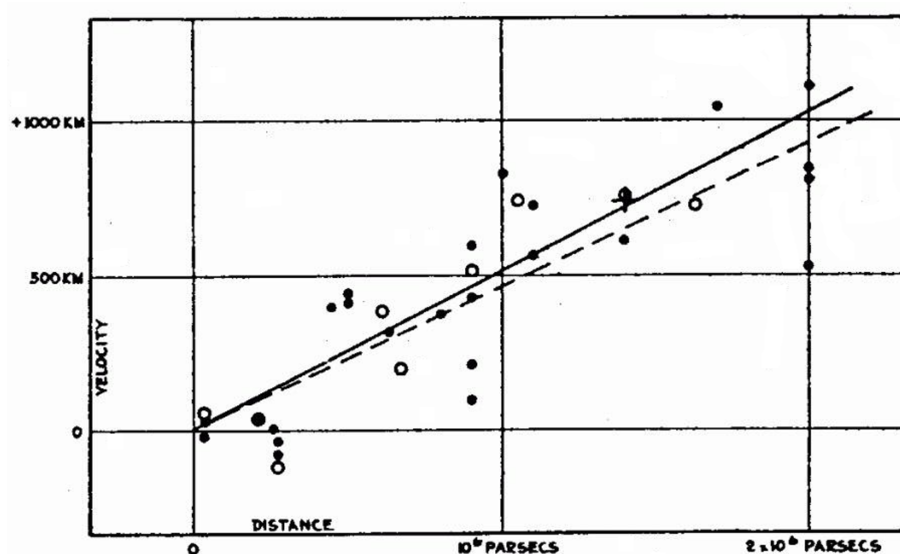
$$m\mathbf{a} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{F}_\parallel + \mathbf{F}_\perp, \tag{1.39}$$

добијамо сагласност са (1.35). Релативна компонента силе паралелна брзини $\mathbf{v}$ расте пропорционално са γ^2, док релативна компонента окомита на брзину остаје једнака „сопственој“. Ово је обрнуто од начина како исте силе третира савремена физика.

Сила маси даје убрзање тако да, из различитих праваца посматрана сила у кретању, може стварати битно различите релативне реалности које није могуће остварити у условима Лоренцових трансформација. Из примера парадокса близанаца се види да те силе могу бити једнократне и снажне, али има и примера када су те силе благе (али упорне) па опет ефикасне у мењању перцепције реалности.

Нетипичан пример (локално) благе и свеприсутне силе је *космолошка одбојна* сила, која је још увек необјашњена у физици. Сада ћемо је покушати разумети помоћу принципа вероватноће, односно објективне случајности, за коју смо рекли да не би имала смисла уколико природа не би имала сила. Претпоставићемо да чињенице о ширењу свемира још увек нису довољно поуздане, па наставак који следи третирајте као тестирање претходних резултата.

Међу првима за нас значајним космолошким открићима је Хаблов закон који се сматра основом за посматрања ширења васионе, а данас је једна од најбољих потврда за њен модел ширења (Big Bang модел), приказан сликом 1.12. Иако се откриће ширења васионе углавном приписује Едвину Хаблу[19], та појава је предвиђена раније, прилогом општој теорији релативности Жоржа Леметра[20] 1927. године у којем је он сугерисао не само ширење васионе, већ је изнео и процене брзина тог ширења, данас познатом *Хабловом константом.*



Slika 1.12: Брзина са удаљеношћу, према Хаблу 1929. године.

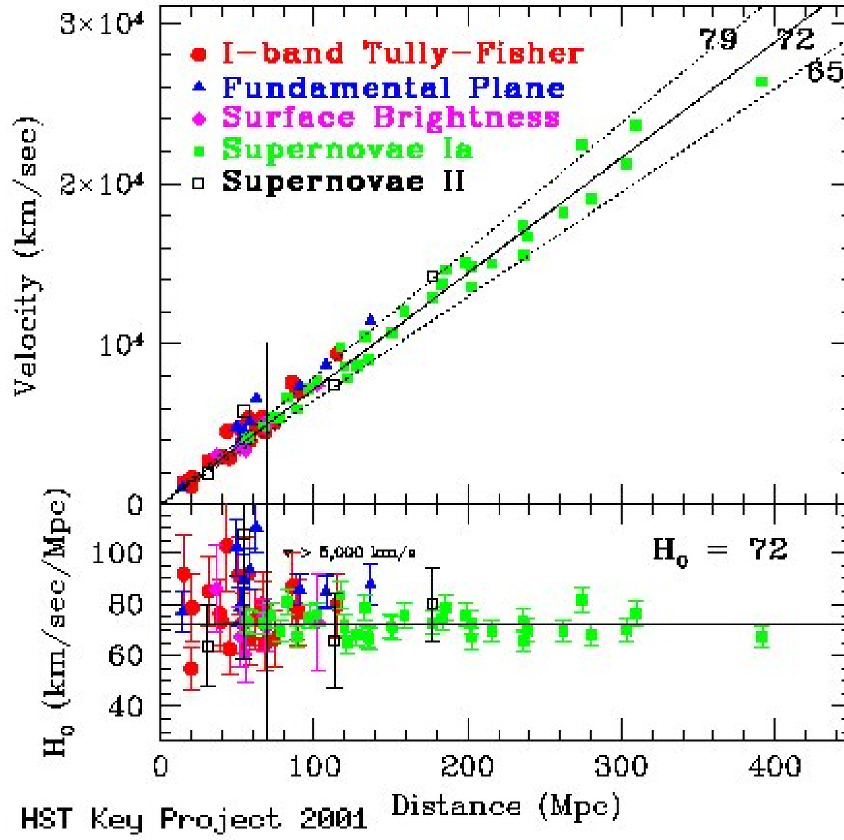
Према Хабловом закону је просечна брзина удаљавања галаксије од нас

$$v = H_0 r, \tag{1.40}$$

где је $H_0 = 72$ km/s/Mpc константа пропорционалности (Хаблова константа, слика 1.13), r је наша „сопствена удаљеност“ од нас удаљене галаксије (која се може мењати током времена) у километрима, а v је њена брзина удаљавања у km/s. Један мегапарсек (Mpc) је мера за удаљеност једнака милиону парсека или 3,26 милиона светлосних година, што је око $3,09 \times 10^{19}$ km. Реципрочна вредност $1/H_0$ назива се *Хаблово време.*

На пример, *галаксија* Андромеда (M31), која је са тамних места видљива и голим оком, налази се око 0,89 Mpc од нас (2,9 милиона светлосних година), а она је само једна од скоро 50 познатих из Локалних галаксија лоцираних 2 Mpc око Млечног пута. Групе које чине галаксије имају типично 1-10 Mpc у пречнику, док су супер групе (нпр. супергалаксија Вирго) пречника око 100 Mpc.

[19]Edwin Hubble (1889-1953), амерички астроном.
[20]Georges Lemaître (1894-1966), белгијски физичар и свештеник.



Slika 1.13: Савремене процене удаљавања галаксија.

Са становишта наших досадашњих разматрања, у хомогеном изотропном свемиру је логично претпоставити егзистенцију неке свеприсутне (нпр. константне) силе $F_0 \neq 0$, јер бисмо у противном имали детерминизам. Потсећам, где нема силе – нема случајности. Приметимо да је то различито од Леметрове и Хаблове хипотезе да је свемир настао у једном праску, а затим се ширио без деловања сталне одбојне силе F_0.

Упоредимо ово са Хабловим законом, користећи формулу за релативну енергију (1.31) и дефиницију силе $F_{\|} = \frac{dp}{dt} = \frac{dE}{dct} = \frac{dE}{dr}$. Приметимо да је:

$$F_{\|} = \frac{dE}{dr} = E_0 \frac{d}{dr} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_0 H_0 v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{E_0 H_0^2}{c^2} r_0 \gamma^2, \tag{1.41}$$

где је r_0 сопствена дужина гледано са звезде. Сада можемо писати:

$$F_{\|} = F_0 r_0 \gamma^2, \quad F_{\perp} = F_0, \tag{1.42}$$

где је $F_0 = E_0 H_0^2/c^2$ сила коју производи честица са сопственом енергијом E_0, која даје брзину галаксији, једнака окомитој сили $F_{\perp} = \text{const}$, гледано са Земље. Тако долазимо до константне силе ($F_0 = \text{const.}$) васионе, која се свугде види једнако као сопствена, али не и као релативна. У правцу ширења на месту дате галаксије та се сила види увећана пропорционално релативистичком фактору (γ^2) и сопственој удаљености (r_0).

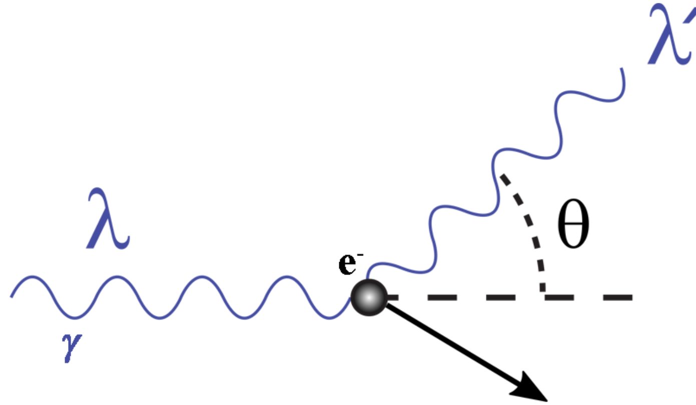
У рачуну је кориштено да је сопствено растојање пропорционално сопственом времену ($t_0 = r_0/c$). Ови закључци су још увек непознати савременој физици.

Мала константна сила васионе (F_0) са подразумеваном објективном случајношћу чини да са различитих места посматрана иста галаксија има различите реалне развоје. Прве разлике чак и ако започињу веома малим корацима, због „ефекта лептира“ теорије хаоса, временом могу ескалирати у битно различитим временским правцима.

1.1.9 Комптонов ефекат

Комптон[21] је својим експериментом 1923. године дао до тада најубедљивију потврду честичне природе радијације. Расипајући X-зраке слободних фотона, он је открио да су таласне дужине λ' расуте радијације веће од таласне дужине λ упадне радијације, приказане на слици 1.14. Научна заједница је прихватила мишљење да се то може објаснити само претпоставком да се X-зраке фотона понашају као честице због чега је Комптон добио Нобелову награду за физику 1927. године.

Упадни фотон (γ) долази са леве стране на датој слици, са енергијом $E_\gamma = h\nu$ и импулсом $|\mathbf{p}_\gamma| = h\nu/c$. Он се судара са електроном (e^-) који мирује (импулса $\mathbf{p}_e = 0$). Након судара, фотон скреће за угао θ и одлази са импулсом $|\mathbf{p}'_\gamma| = h\nu'/c$, док се електрон одбија (у правцу стрелице) са импулсом $\mathbf{p}'_e$.



Slika 1.14: Комптонов ефекат.

Из закона одржања енергије и импулса следи, редом:

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e, \quad \mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_e = \mathbf{p}'_\gamma + \mathbf{p}'_e, \tag{1.43}$$

$$\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \sqrt{(p'_e c)^2 + (m_e c^2)^2}, \quad p'^2_e = p^2_\gamma + p'^2_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma \cos\theta, \tag{1.44}$$

$$\begin{cases} (p'_e c)^2 = (\frac{hc}{\lambda})^2 + (\frac{hc}{\lambda'})^2 + (\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'})2hcm_e c^2 - \frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'}, \\ (p'_e c)^2 = (\frac{hc}{\lambda})^2 + (\frac{hc}{\lambda'})^2 - \frac{2h^2c^2\cos\theta}{\lambda\lambda'}. \end{cases} \tag{1.45}$$

Упоређивањем два добијена резултата налазимо

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta), \tag{1.46}$$

[21] Arthur Compton (1892-1962), амерички физичар.

а то је промена таласне дужине расутог фотона у односу на упадну која се назива *Комптонова промена.*

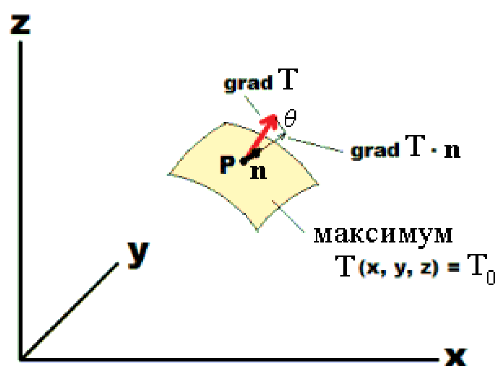
Када је $\theta = 0$, тада је $\Delta\lambda = 0$, што значи да нема промене таласне дужине фотона и нема промене енергије фотона, па није било судара нити електрона на тој путањи. Када је $\theta = 180°$, тада се долазећи фотон рефлектује назад, промена таласне дужине је максимална и њој одговара максимална енергија коју електрон може стећи таквим сударом. То је Комптоново објашњење које је убрзо потврђено и прихваћено.

Њему сада додајемо ново објашњење засновано на принципу вероватноће. Према овом принципу импулс фотона мора да иде смером највећих вероватноћа. И заиста, како је вероватноћа налажења фотона на датом месту већа када је његова таласна дужина краћа, то и прелазак на мање вероватна стања фотона прати повећање његове таласне дужине. Та промена на путању (релативно) мање вероватних стања праћена је сударом или дејством неке силе, јер је промена хода по путањи највећих вероватноћа могућа само на начин који није спонтан. Ово ствара и могућност проширења појма „градијент“ уз додатно разумевање таласне функције квантне механике.

Замислимо да имамо 3-Д простор $Oxyz$ и неку реалну диференцијабилну функцију, $T = T(x,y,z)$, попут температуре у пећници која се полако мења од тачке до тачке. Када тражимо смер пораста температуре, посматраћемо изводе по све три координате и помоћу њих формирати вектор

$$\text{grad}\, T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla T, \tag{1.47}$$

који се назива *градијент.* Јединични вектори Декартове апсцисе, ординате и апликате су редом $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$. Градијент има правац и смер најбржег раста температуре.



У разним тачкама температура узима разне вредности, дефинишући неку површ $T = T(x,y,z)$, као на слици лево. Линије површи које формирају тачке константне температуре називају се нивои-површи, или *геодезијске линије* температуре. За тачке са истог нивоа разлике температура су нула, па би прираштај температуре том линијом био нула, њихов градијент био би нула вектор, а такав је окомит на сваки вектор, па и на ниво-површ.

Скаларни производ вектора, уопште $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, једнак је производу њихових интензитета $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ и слично за $|\mathbf{y}|$, и косинуса угла $\theta = \angle(\mathbf{x},\mathbf{y})$ између њих

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta. \tag{1.48}$$

Посебно у *ортонормираном систему* вектора скаларни производ постаје

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \tag{1.49}$$

Отуда и због $\cos\theta \le 1$ имамо *Коши-Шварцову неједнакост*:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ky_k \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2}. \tag{1.50}$$

која важи за све $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, где једнакост важи ако и само ако постоји реалан број λ такав да је $x_k = \lambda y_k$ за све $k = 1, 2, \dots, n$.

Да градијент има правац и смер најбржег раста температуре видимо на следећи начин. Нека је $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y, z)$ јединични вектор нормале, окомит на површ истих температура у датој тачки. Збир квадрата компоненти нормале n_x, n_y и n_z је један, а угао између градијента и нормале је θ. Множено по координатама, скаларни производ градијента и нормале температуре је:

$$\operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \frac{\partial T}{\partial z} n_z = |\operatorname{grad} T| \cos\theta. \tag{1.51}$$

То је скалар (број) који има највећу вредност када је угао између градијента и нормале нула, $\theta = 0$, јер тада је косинус максималан, $\cos 0 = 1$. У случају да је тачка T_0 локални екстрем, сва три извода су нуле, па су и градијент и број (1.51) нуле. Обрнуто, број (1.51) је максималан када и израз у Коши-Шварцовој неједнакости (1.50), а то је када постоји једно λ у све три једнакости $\partial_\xi T = \lambda n_\xi$, за све три координате $\xi \in \{x, y, z\}$. Отуда $\operatorname{grad} T \| \mathbf{n}$.

Тиме смо доказали да градијент (1.47) има правац и смер најбржег раста поља температуре, односно било које диференцијабилне функције $T = T(x, y, z)$. Исто ће се десити када уместо „температура“ користимо израз „потенцијал“ или неки други назив за вредности придружене тачкама простора, ако се оне поступно (континуирано) мењају од места до места, формирајући глатке ниво-плохе интензитета. Интензитет градијента је интензитет тог раста. У том смислу су нам посебно занимљиве Борнове вероватноће и таласне функције.

На пример, таласна функција *слободне честице* је

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)/\hbar}, \tag{1.52}$$

са константном амплитудом a. Овде су $\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$ и $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ редом вектори импулса и положаја честице у правоуглим Декартовим координатама са једниничним векторима оса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, а E и t су енергија и време (тренутак) када се честица налази на датом месту. Градијент ове таласне функције је

$$\operatorname{grad} \psi = \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \psi. \tag{1.53}$$

Када је таласна функција нормирана, интензитети градијента и импулса су једнаки. Штавише, овај *имагинарни градијент* има правац и смер вектора импулса, јер честица граби кроз свој имагинарни простор држећи се максималних вероватноћа. Сопствени простор квантних стања честице је заправо простор комплексних таласних функција, односно одговарајућих Борнових вероватноћа на начин како их та честица види.

Када пажљивије погледамо израз (1.53) видимо да импулс $\mathbf{p}$ можемо заменити са *оператором импулса*

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right), \tag{1.54}$$

па и на десној страни једнакости имати градијент ψ. Ова замена је добро позната у квантној механици али сада видимо да је она могућа управо због принципа вероватноће, да се честица креће највероватнијим путањама, бар што се тиче њеног сопственог виђења.

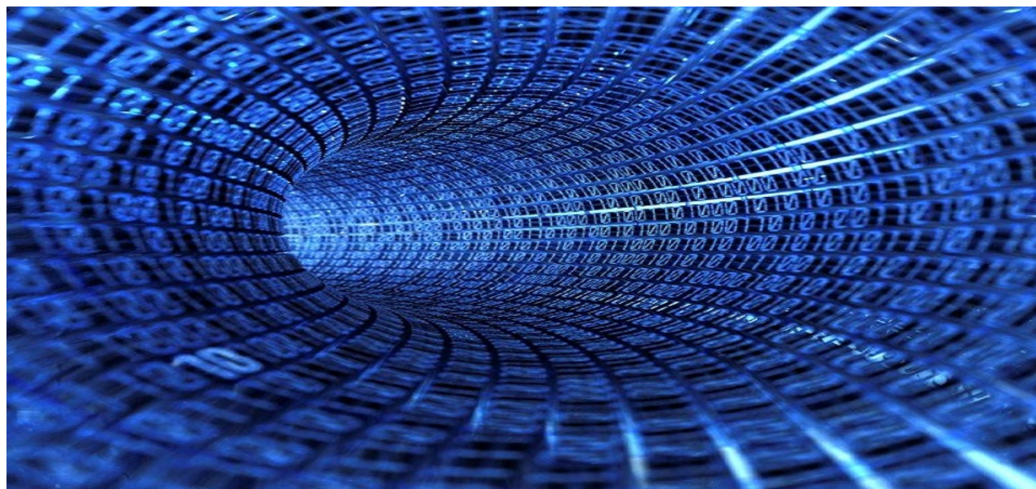
Занимљиво је приметити да су импулс и положај у физици често симетрични и замењиви. Тако је и у квантној механици. Када градијент (1.47) дефинишемо изводима по импулсима p_x, p_y и p_z, а не по положајима x, y и z, онда претходна анализа остаје иста све до (1.53). Даље настављамо тако што вектор **p** заменимо вектором **r**, а затим оператор импулса заменимо *оператором положаја*

$$\hat{\mathbf{r}} = i\hbar\nabla = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial p_x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial p_y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial p_z}\mathbf{k}\right) \tag{1.55}$$

Дакле, честица следи и највероватније положаје и највероватније импулсе.

1.2 Информација

Разматрамо Хартлијев предлог информације, логаритам броја равноправних могућности, затим Шенонов као средњу вредност таквих логаритама као и још неке. Те нове су поопштене Хартлијева и Шенонова дефиниција информације од којих ће се друга једног дана називати количином неодређености, али је то до даљњег небитно све док формалну разлику имеђу неодређености и информације не примећујемо.



Slika 1.15: Информација.

Коначни циљ је разумевање супстанце помоћу информације да бисмо објаснили механику, динамику и гравитацију, данас најтврђа упоришта детерминизма. То су места теорије где најмање очекујемо узроке у случајностима и где се не надамо открићу информације као физикалне реалности.

1.2.1 Хартлијева дефиниција

Информацију као број су први успешно дефинисали Најквист[22] и Хартли[23] 1928. године. Утврдили су да је информација исхода једног од једнако вероватних могућности пропорционална логаритму броја могућности. Радећи за Белову телефонску компанију развили су идеју информације као „количине вести“, инспирисани новинарством. Већа је вест „човек је ујео пса“ него вест „пас је ујео човека“ јер је прва мање вероватна, приметили су, али нису наивно потрчали да информацију дефинишу просто као број могућности.

Информација се може дефинисати као најмањи број питања (број $H = 1, 2, 3, \dots$) потребних да се *бинарним претраживањем* дође до (једног од 2^H) одговора. Овим поступком уређен скуп непознатих делимо на два дела. Када сазнамо у којем од два дела је оно што тражимо, тај подскуп поново делимо на два дела и тражимо даље. Број претражених елемената 2^H је експоненцијална функција броја делења H, које називамо информацијом. Дакле, информацију можемо посматрати као инверзну функцију експоненцијалне, као логаритам броја могућности, односно негативан лога-

[22]Harry Theodor Nyqvist (1889-1976), амерички инжењер шведског порекла.
[23]Ralph Vinton Lyon Hartley (1888-1970), амерички инжењер.

ритам вероватноће исхода

$$H = \log_2 N = -\log_2 \frac{1}{N}. \tag{1.56}$$

Број H називамо *Хартлијевом информацијом*, односно информацијом коју садржи N једнако вероватних могућности, а број $P = \frac{1}{N}$ вероватноћом исхода. Испоставило се да је такав избор био пун погодак.

На пример, за откривање једног замишљеног (број пет) од првих осам природних бројева ($N = 8$) потребна су три питања ($H = 3$). На прво питање „да ли је замишљени број мањи од пет", очекујемо само одговор „да" или „не" - одговор је „не". На друго питање „да ли је замишљени број мањи од седам" - одговор је „да". Треће питање је „да ли је замишљени број мањи од шест" - одговор је „да". Тако сазнајемо да је тражени број пет.

Када се могућности множе, тада се информације сабирају, јер је логаритам производа једнак збиру логаритама. Управо је то оно својство Хартлијеве информације која ју је повезала са вероватноћом и дала јој крила у техници. Погледајмо то на примеру вероватноће. Када бацамо фер новчић са две могућности, вероватноћа исхода једне од две је $\frac{1}{2}$. Када бацамо фер коцку са шест могућности, вероватноћа исхода једне од шест је $\frac{1}{6}$. Када бацимо и новчић и коцку број једнако вероватних (парова) могућности је дванаест ($2 \cdot 6$) са вероватноћом $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Информација једног од тих дванаест парова је збир информације добијене бацањем новчића и информације бачене коцке.

Са овом неочекиваном логаритамском адитивношћу, Хартлијева информација од апстрактне идеје постаје помало физикална, материјална ствар. Замислимо да из скупа од m_1 бројева на случајан начин извлачимо један, па онда опет из скупа m_2 бројева извлачимо један и тако даље, до закључно скупа са m_n бројева. Информација свих n извлачења биће једнака збиру информација појединих, без обзира којом брзином или редоследом обављали та извлачења. То произилази из логаритамске функције уопште, што нам даје идеју да се база логаритма (број 2) наведене формуле може мењати. Промена базе логаритма Хартлијеве информације просто значи други избор мерних јединица. Када је та база 2 јединица информације је „бит", када је база Ојлеров број $e \approx 2,71828$ јединица је „нат" (natural logarithm).

У даљем тексту користимо *природни логаритам* $\ln P = \log_e P$, па је

$$H = -\ln P, \tag{1.57}$$

Хартлијева информација коју даје случајни догађај вероватноће $P \in (0,1)$. Најинтересантнији су најизвеснији догађаји вероватноће блиске јединици, када

$$P = 1 - x, \quad x \to 0, \tag{1.58}$$

или када је $x > 0$ неки мали број чији се квадрат и виши степени могу занемарити. Развој логаритамске функције у Маклоренов ред даје

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots, \tag{1.59}$$

па вредност (1.57) тада постаје

$$H \approx x, \tag{1.60}$$

за x из мале околине 0. Што је већа вероватноћа мања је информација.

Поред своје логаритамске адитивности, Хартлијева информација уопште има и поменуту новинарску особину да је извеснији догађај мање информативан. Што је

мањи број (равноправних) могућности већа је вероватноћа појединог исхода, али је мања његова информација. Принцип реализовања највероватнијих случајности постаје принцип шкртости у давању Хартлијеве информације, део онога што овде називамо *принцип информације*. Такође, чешћа реализација извеснијих догађаја значи ређу реализацију неизвеснијих.

Ово својство остаје у извесном смислу и у скупу $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ случајних догађаја са неједнаким вероватноћама $P_1, P_2, \dots, P_N$. На пример, апроксимирајмо скуп Ω скупом Ω' са такође $N \in \{2, 3, \dots\}$ једнако вероватних догађаја, вероватноће

$$P_A = \frac{1}{N}(P_1 + P_2 + \dots + P_N) = \frac{1}{N}. \tag{1.61}$$

Број P_A називамо *аритметичком средином*, просеком бројева P_k. *Геометријска средина* била би

$$P_G = \sqrt[N]{P_1 P_2 \dots P_N}. \tag{1.62}$$

Свака од њих, P_A и P_G, је нека врста просека. То су два броја између најмањег и највећег у датом низу, при чему важи неједнакост $P_A \ge P_G$, односно

$$\frac{1}{N}(P_1 + P_2 + \dots + P_N) \ge \sqrt[N]{P_1 P_2 \dots P_N}, \tag{1.63}$$

где једнакост важи ако и само ако $P_1 = P_2 = \dots = P_N$. Логаритмовањем добијамо

$$-\ln P_A \le \frac{1}{N}(-\log_2 P_1 - \log_2 P_2 - \dots - \log_2 P_N). \tag{1.64}$$

Посебно, када поменути скуп Ω чини сав скуп међусобно независних исхода (један од њих ће се сигурно десити), биће

$$P_1 + P_2 + \dots + P_N = 1. \tag{1.65}$$

Тада низ вероватноћа (P_k) са $k = 1, 2, \dots, N$ називамо *расподелом вероватноћа*, па аритметичка средина постаје

$$P_A = \frac{1}{N}. \tag{1.66}$$

Оваква или онаква, средња вредност је нека замена за Хартлијев скуп једнаких вероватноћа. У оба случаја, информација просечног догађаја није већа од просека свих информација.

Када год неку физичку појаву апроксимирамо добијамо још мање информације, што је интуитивно разумљиво. Такође и усредњавањем губимо неке појединости. Даље, због настојања да емитује што мање информације и (1.64), за очекивати је бежање природе у једноставност усредњавањем, како би смањила губитке своје неизвесности. Наиме, Хартлијева формула (1.56) даје да је преображена количина неизвесности тачно једанака насталој информацији. Реализацијом, природа губи тачно онолику количину неизвесности колико је информације емитовала. Ту правилност назовимо *Хартлијевим законом одржања* количине (неизвесности плус информације). Слично имамо и код атрактора из теорије хаоса. Бежећи у рутине, природа покушава сачувати неизвесност и смањити емисију информације.

Да нема Паулијевог *принципа искључења* (два идентична фермиона не могу бити у истом квантном стању), који је 1925. године формулисао Волфганг Паули[24], бежање

[24] Wolfgang Pauli (1900-1958), аустријско швајцарско американчки теоријски физичар.

природе у једноставност усредњавањем могло би ићи до краја. Сви квантни системи били би тачно једнаки, толико да би се могло сматрати да их постоји само један. Опет, у правој великој хомогености и изотропности не би било места за поремећаје, нити за силе и убрзања, због чега би и сама случајност постала непотребна. Са друге стране, макросвет нема потребу за сличним бежањем јер има закон великих бројева који свакако ограничава емисије информације.

За $A, B \in \Omega$ кажемо да су *независни догађаји* ако дешавање једног не утиче на вероватноћу другог. Посебно, та два догађаја су *статистички независни* акко[25] је

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{1.67}$$

Како је логаритам производа једнак збиру логаритама, то је Хартлијева информација статистички независних догађаја једнака збиру информација појединих догађаја.

Хартлијеву информацију поопштавамо и на случајеве *условних вероватноћа.* За два дата догађаја, вероватноћу првог под условом да се десио други дефинише:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.68}$$

Овај број је све већи када догађај A више зависи од B (за константно B), па је информација условног догађаја

$$-\ln P(A|B) = -\ln P(A \cap B) + \ln P(B), \tag{1.69}$$

све мања када A више зависи од B.

Према томе, Хартлијева информација условне вероватноће прати наша очекивања у вези са квантном спрегнутошћу[26]. Приметимо овде још једну потврду принципа информације, да се неизвесност не реализује када то није потребно. Ово се добро уклапа у „принцип најмањег дејства“[27] који ћемо касније такође слично третирати.

У физици то „најмање дејство“ је варијациони принцип који примењен на *акцију* (производ импулса и пута, или енергије и времена) даје једначине кретања датог система. Различите акције се морају или минимизирати или максимизирати. Нпр: „светлост се одбија тако да троши најмање времена и стиже најбрже што може“, доследно ћемо преводити: „да произведе најмање информације“.

Пример 1.2.1 (Независни догађаји)**.** *Ако је пар A, B статистички независан, онда су тако независни и парови догађаја:*

$$A, B' \qquad A', B \qquad A', B'$$

где прим значи негацију, тј. комплементан догађај.

Решење. За први пар имамо редом:

$$P(A \cap B') = P(A)P(B'|A) = P(A)[1 - P(B|A)] = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B').$$

Слично доказујемо и остала два. □

[25] акко - ако и само ако

[26] Очекујемо да су квантно спрегнути догађаји зависни и да се дешавају (имају реалне последице) са смањеном емисијом информације.

[27] Principle of least action: `https://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_least_action`

1.2.2 Борнова информација

Хартлијева информација непосредно примењена на Борнову вероватноћу даје:

$$H = \ln|\psi|^2 = \ln(\psi^*\psi) = \ln\psi^* + \ln\psi, \tag{1.70}$$

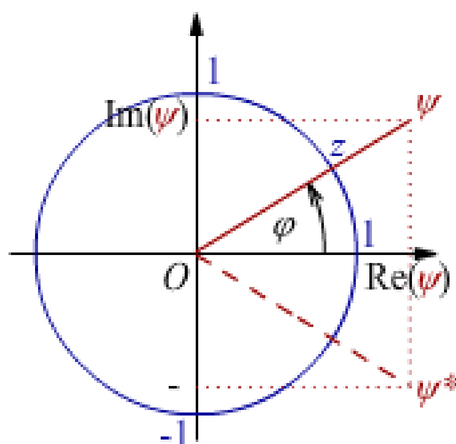
што значи да можемо дефинисати *комплексну функцију* $L \in \mathbb{C}$ таласне функције ψ квантне механике, изразом

$$L = \operatorname{Ln}\psi = \ln|\psi| + i\operatorname{Arg}\psi, \tag{1.71}$$

где је $|\psi| = \sqrt{\psi^*\psi}$ *модуо* комплексног броја ψ, i је *имагинарна јединица*, а $\operatorname{Arg}\psi$ угао у радијанима, или *аргумент*, који комплексни број ψ заклапа са реалном осом у комплексној равни. Број L називамо таласном или *комплексном информацијом* Хартлија. Овај логаритам је инверзан експоненцијалној функцији, па је

$$\psi = e^L \tag{1.72}$$

комплексна вероватноћа. Производ коњуговано комплексних вероватноћа је Борнова вероватноћа.



Slika 1.16: Комплексна раван.

На слици 1.16 видимо приказ комплексног броја $\psi = x + iy$ у комплексној равни, чије су реална и имагинарна пројекција на апсциси и ординати редом $\Re(\psi)$ и $\Im(\psi)$. Кружница јединичног полупречника представља тачке $z = x + iy$ са координатама (x, y) за које важи $x^2 + y^2 = 1$, па увек постоји угао φ да је

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad |z| = 1. \tag{1.73}$$

За два таква броја z_1 и z_2 са угловима φ_1 и φ_2 производ $z_1 z_2$ је опет на јединичној кружници са углом $\varphi_1 + \varphi_2$. То се лако доказује множењем комплексних бројева z_1 и z_2 и применом адиционих формула за косинус и синус. Када се косинус и синус развију у редове, њихов збир z је развој у ред експоненцијалне функције, па је

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = \operatorname{cis}(\varphi). \tag{1.74}$$

То је Ојлерова једнакост[28]. Зато се сваки комплексан број може писати у облику

$$\psi = |\psi|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.75}$$

где је $|\psi|$ модуо (дужина од исходишта O до броја ψ), а $\varphi = \text{Arg}\,\psi$ је аргумент (угао између апсцисе и те дужи).

Конјуговано комплексним бројевима ψ^* и ψ апсциса је оса симетрије, па они имају исте реалне вредности а имагинарне супротног знака. Тако је:

$$\psi^*\psi = [\Re(\psi) - i\Im(\psi)][\Re(\psi) + i\Im(\psi)] = \Re^2(\psi) + \Im^2(\psi), \tag{1.76}$$

а то је квадрат дужине од O до тачке ψ, хипотенузе правоуглог троугла са теменима O, $\text{Re}(\psi)$ и ψ на слици 1.16.

На тој слици се види да угао $\varphi = \text{Arg}\,\psi$ остаје у бити исти када му додамо или одузмемо произвољно много пуних углова $2k\pi$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \dots$). Основни угао тих углова обично означавамо са $\arg\psi \in (-\pi, \pi]$. Према томе, број L је периодичан са основним периодом 2π. Међутим, чак и ако користимо само основни аргумент па пишемо

$$L = \ln|\psi| + i\arg\psi, \quad \arg\psi \in (-\pi, \pi], \tag{1.77}$$

комплексна експоненцијална функција (1.72) је *периодична функција*, због

$$e^{L+2i\pi} = e^L, \tag{1.78}$$

па једначина (1.72) има бесконачно много решења у домену комплексног $L \in \mathbb{C}$. То је некада у математици био повод парадокса, попут следећег.

Пример 1.2.2 (Бернули-Лајбницов парадокс)**.** *Постоји лажан низ дедукција који наводно доказује да је* $\text{arctg}(1) = 0$*, поред* $\text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

Решење. Поменути низ „дедукција“ је:

$$\text{arctg}(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^2+1} = \int_0^x \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\xi - i} - \frac{1}{\xi + i}\right) d\xi = \frac{1}{2i}\ln\frac{x-i}{x+i},$$

па за $x = 1$ добијамо:

$$\text{arctg}(1) = \frac{1}{2i}\ln\frac{1-i}{1+i} = \frac{1}{4i}\ln\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = \frac{1}{4i}\ln(-1) = \frac{1}{8i}\ln(-1)^2 = \frac{1}{8i}\ln 1 = 0.$$

Међутим, $\text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

Парадокс настаје због неузимања у обзир вишезначности логаритма комплексног броја, јер је $\text{Ln}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ за произвољно $k \in \mathbb{Z}$. На пример, за $k = 1$ биће $\text{Ln}(1) = 2i\pi$ па имамо:

$$\text{arctg}(1) = \frac{1}{8i}\text{Ln}(1) = \frac{1}{8i}2i\pi = \frac{\pi}{4},$$

и нема парадокса. □

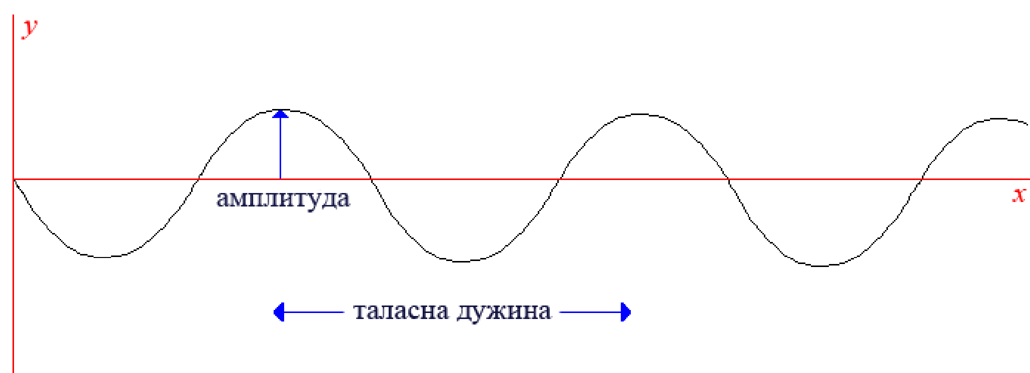
Зато што је информација L комплексан број, зато је комплексна вероватноћа (1.72) периодична. Помињали смо да физичке појаве које немају *тачне реалне вредности* (као и нуле полинома када немају реалних нула) не можемо тачно представљати реалним бројевима. Сада видимо и даље, да су функције инверзне таквима обавезно периодичне. Зато је таласна функција квантне механике периодична.

[28]Функција $\text{cis}(\varphi) = e^{i\varphi}$ се користи од недавно.

1.2.3 Таласи материје

Таласи материје су централни део квантне механике. Они су произашли из особина квантних система да су истовремено и таласи и честице. Мали делови материје имају и таласна и квантна својства, што се назива дуализмом *талас-честица.* На пример, електрони показују особине *дифракције*, груписања по слабијим и јачим концентричним кружницама, када наиђу на препреку или морају проћи кроз отвор. Таласи електрона су заправо таласи вероватноће који стварају нове и нове позиције електрона (чији се делови маса, наелектрисање или спин не могу даље делити) док време одмиче, држећи се принципа да ће једном реализована честица у датом тренутку бити опет највероватнија у истим околностима и у следећем тренутку, све док нека сила не поремети ту вероватноћу. Као атрактори, таласи вероватноће се могу апроксимовати синусоидама.

На слици 1.17 приказан је једноставан талас, представљен синусоидом $y = a\sin bx$. Талас осцилује око апсцисе (x-осе) са максималним одступањима у правцу ординате (y-оса) константним *амплитудама* (a), које се ($a, b =$ const.) периодично понављају. Растојање између две суседне истосмерне амплитуде назива се *таласном дужином* ($\lambda = 2\pi/b$) или *основним периодом* таласа.



Slika 1.17: Једноставан талас.

Зато што су параметри a и b дате синусоиде константе, талас изгледа равномерно као на слици. Ако се параметри мењају дуж апсцисе, $a = a(x)$ и $b = b(x)$, синусоида је *стационарна*, али није обавезно равномерна. Уопште, стационарним стањем називамо оно које се не мења временом. Када се параметри таласа мењају и временом, али тако да амплитуде осцилују из горњег у доњи смер ординате не мењајући место на апсциси, тада имамо *стојеће таласе.* Непокретне тачке на оси таквих таласа називамо *чворовима таласа.* Коначно, гомила таласа на једном месту које може да се креће (не мора) назива се *таласни пакет.*

Фаза таласа је позиција тачке таласа у датом тренутку током његовог периодичног кретања временом. За врх амплитуде стојећег таласа кажемо да се помера паралелно ординати (горе-доле), док се код таласа у покрету помера паралелно апсциси (лево-десно). Рецимо, када се синусоида на датој слици помери за дужину $-\alpha$ паралелно апсциси, тада се добије нова синусоида:

$$y \to y_1 = a\sin[(x+\alpha)b] = a\sin(xb+\varphi), \tag{1.79}$$

па кажемо да фазни помак износи $\varphi = \alpha b$. Фазни помак се може мењати временом и тада пишемо $\varphi = \varphi(t)$, када је фазна брзина $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$. То је брзина простирања таласа (апсцисом на слици 1.17).

У динамици флуида уопште, дисперзија (расипање) водених таласа се односи на расипање фреквенције, што значи да таласи различитих таласних дужина путују различитим фазним брзинама. Вода са својом слободном површином у том смислу спада у дисперзивне медије, а водени таласи који се простиру површином воде су покретани површинском напетошћу и гравитацијом. Важност гравитације за кретање таласа воде сада, након претходног разматрања, значи да дубље узроке таласног кретања воде треба тражити у принципу вероватноће и последицама.

Код трансферзалних (окомитих) таласа попут водених, вредност ординате буквално значи износ отклона таласа од правца његовог простирања дуж апсцисе. Код лонгитудиналних (уздужних) таласа попут звучних, вредност ординате је мера стискања медија дуж правца кретања таласа. Водене таласе покрећу *импресије* и *депресије*, а звучне тзв. *компресије* и *рарефракције*. Компресије су области високог притиска, рарефракције су области ниског. Аналогно гравитацији, показаће се да и притисак има везе са вероватноћом.

Прикривени ефекти неизвесности макросвета су израженији у микросвету. Реализацијама случајних догађаја настају информације чије мноштво настало „сада“ чини нашу садашњост. Садашњост затим постаје наша прошлост. То је скраћени опис трансформације неизвесности, која се на крају таложи у (углавном) стабилну прошлост због закона одржања информације. Наша прошлост је таман толико променљива колико неизвесности чувају њени поједини догађаји. Са друге стране, оно што је реализовано у облику информације тачно толико је непроменљиво колико можемо веровати информацији добијеној у одговарајућем експерименту.

Интуитивно је јасно да се информација неће мењати померањем квантног система дуж координатне осе (укључујући време), ако се неће мењати вероватноћа. Аналитички облик тог тврђења имамо у следећем примеру.

Пример 1.2.3 (Конзервација неизвесности). *Показати да за* $\xi \in \{x, y, z, ct\}$ *једначина*

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \xi}\psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0, \tag{1.80}$$

значи одржање неизвесности стања $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ *променом координате* ξ.

Решење. Количина неизвесности се неће променити ако и само ако се вероватноћа дуж ξ неће променити. Извод Борнове вероватноће је:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}|\psi|^2 = \frac{\partial}{\partial \xi}(\psi^*\psi) = \frac{\partial \psi^*}{\partial \xi}\psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

па због

$$\frac{\partial}{\partial \xi}|\psi|^2 = 0$$

добијамо тражену једнакост. □

Непромењена неизвесност значи и не-реализацију случајних догађаја и не-стварање нове информације затвореног квантног система. Због претходно поменутог закона одржања укупне неизвесности и информације, такав систем би требао да одржава

непромењену информацију када год чува непромењеном неизвесност. И заиста, из (1.70) диференцирањем добијамо:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}H = \frac{\partial}{\partial\xi}\ln|\psi|^2 = \frac{1}{|\psi|^2}\frac{\partial}{\partial\xi}|\psi|^2 = \frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\xi},$$

па из $\partial_\xi H = 0$ следи (1.80). Обрнуто, из (1.80) заменом (1.72) добијамо:

$$0 = \frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = e^{L^*}e^L\frac{\partial L^*}{\partial\xi} + e^{L^*}e^L\frac{\partial L}{\partial\xi} = e^{L^*+L}\frac{\partial}{\partial\xi}(L^* + L),$$

а отуда $\partial_\xi H = 0$.

Покажимо на сличан начин и оно што смо интуитивно најавили са инерцијалним кретањем и силом. Пре свега, да су вероватноћа и Хартлијева информација константне када нема дејства силе. На пример, Дираковa[29] једначина сведена на апсцису

$$\left[\beta mc^2 + c\left(\sum_{n=1}^{3}\alpha_n p_n\right)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}, \tag{1.81}$$

инваријантна је на Лоренцове трансформације. Следећи пример показује да решења ове једначине задовољавају једнакост очувања (1.80).

Пример 1.2.4. *Показати да свако решење Диракове једначине чува информацију.*

Решење. Из (1.81) следи, редом:

$$\left[\beta mc^2 + c\left(\sum_{n=1}^{3}\alpha_n p_n\right)\right]\psi\psi^* = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^*,$$

$$-\left[\beta mc^2 + c\left(\sum_{n=1}^{3}\alpha_n p_n\right)\right]\psi^*\psi = i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi,$$

а отуда сабирањем

$$0 = i\hbar\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^* + \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right),$$

одакле тражени услов (1.80). □

Решења која не обухвата Диракова једначина налазе се у Шредингеровој[30] једначини, коју такође можемо написати у облику за апсцису и време

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U(x,t)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{1.82}$$

где је таласна функција $\psi = \psi(x,t)$. Први сабирак је кинетичка енергија, други је потенцијална енергија, а на десној страни једнакости је укупна енергија. Маса честице је m, потенцијал $U(x,t)$ а i је имагинарна јединица. Према томе, овако написана Шредингерова једначина изражава закон одржања енергије.

[29]Paul Dirac (1902-1984), енглески математичар.
[30]Erwin Schrödinger (1887-1961), аустријски физичар.

Једноставнија решења ове једначине добијамо када нема промена стања временом $\psi = \psi(x)$ и када је потенцијал функција само апсцисе $U = U(x)$. У најједноставнијем случају, за *слободну честицу-талас*, добијамо решење:

$$\psi(x) = ae^{ikx}, \quad \frac{\hbar^2}{2m}k^2 = E, \quad p = \hbar k. \tag{1.83}$$

где је a реална константа, p импулс честице, k (реалан) таласни број, E енергија честице, $\hbar = h/2\pi$, $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js је Планкова константа. То је стационарно стање. Да за слободну честицу важи закон одржања информације (1.80) следи из следећег израчунавања:

$$\psi^*(x) = ae^{-ikx}, \quad \psi(x) = ae^{ikx},$$

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial x} = -ik\psi^*, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = ik\psi,$$

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi = -ik\psi^*\psi, \quad \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} = ik\psi^*\psi,$$

$$\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi = 0,$$

Према томе, важи једнакост (1.80). Међутим, информација није исто што и енергија, па можемо очекивати да нека решења Шредингерове једначине (1.82) не испуњавају услов одржања информације.

И заиста, за честицу у побуђеном стању, када $a = a(x)$ више није константа, сличним поступком налазимо

$$\frac{d\psi^*}{dx}\psi + \psi^*\frac{d\psi}{dx} = 2a\frac{da}{dx} \neq 0, \tag{1.84}$$

када је извод $\frac{da(x)}{dx} \neq 0$. Упоређујући са претходним, сада можемо приметити да су овакве честице у неинерцијалним системима.

Дакле, када поопштену Хартлијеву дефиницију (1.70) и таласну функцију напишемо у облику (1.72), тада је L поопштена информација и комплексан број. Из очувања вероватноће (1.80) следи $\partial_\xi(L^* + L) = 0$, што значи очување реалног дела те информације, док имагинарни део чини функцију $\psi = \ln L$ периодичном. Међутим, сила ремети вероватноћу и мења информацију, што потврђује (1.84).

Слободна честица (1.83) је у *стационарном стању*, јер на њу не делују силе и према томе њена се енергија не мења временом. Слободне честице такође представљају вероватносне таласе, нормиране тако да укупна површина испод графа квадрата норме таласне функције, па до x-осе износи један. Зато је за њена стања битно одакле је кренула (рецимо догађај D_1) и докле је стигла (догађај D_2), на интервалу где „знамо“ да се налази. И то има своје чудне последице које сам већ описивао.

Нека је та равномерна „слободна“ честица фотон који путује од интеракције D_1 до D_2. Због објективне неизвесности (ма како нешто било организовано оно се увек може изјаловити) фотон након напуштања догађаја D_1 не може бити сасвим сигуран у сусрет са догађајем D_2. Ако се догађај D_2 никада не деси, амплитуде вероватноће његове таласне функције ће се толико развући до чињенице да фотон никада није нити постојао, да се догађај D_1 у његовој историји никада и није десио. Напротив, ако се фотон сретне са догађајем D_2, његова се прошлост мора прилагодити тако да и догађај D_1 буде реалан. Ако су та оба догађаја реални биће испоштован (рецимо) закон одржања импулса, иначе неће.

Према томе, разматрамо теорију у којој се *квантна спрегнутост* подразумева. Верујемо не само у оно „фантомско деловање на даљину“ коме се противио Ајнштајн, већ и у деловање садашњости на прошлост. Прошлост, заједно са простором и материјом васионе, је депонија информација и она је трајна ствар само толико колико важи закон одржања информације. Са друге стане, неизвесност је оно што није постало информација, а тога наша васиона има значајно више него свог до сада створеног времена, простора и материје.

1.2.4 Шенонова дефиниција

Развијајући Хартлијеву идеју и радећи за исту компанију, Клод Шенон[31] је 1948. године дефинисао информацију догађаја различитих вероватноћа. За основу је узео *расподелу вероватноћа.* У дискретном случају тада имамо највише пребројив скуп независних случајних догађаја Ω из којег се реализује по један догађај $\omega_k \in \Omega$ са вероватноћом $P_k = \Pr(\omega_k) \ge 0$. Збир свих вероватноћа расподеле је један. Нека догађај ω_k редом за $k = 1, 2, 3, \dots$ носи Хартлијеву информацију $H_k = -\ln P_k$. Средња вредност свих, *математичко очекивање*, износи

$$S = -\sum_k P_k \ln P_k, \quad \sum_k P_k = 1, \tag{1.85}$$

где се сабира по свим индексима k. То је *Шенонова информација* у дискретном случају. Овај се израз своди на Хартлијев (1.57) када су сви исходи једнаких вероватноћа. Аналогно се дефинише Шенонова информација у случају континуума, помоћу густине вероватноће $\rho \ge 0$ која зависи од дела $\omega \subseteq \Omega$ неког континуума Ω случајних догађаја, интегралом:

$$S = -\int_\Omega \rho \ln \rho \, d\omega, \quad \int_\Omega \rho \, d\omega = 1, \tag{1.86}$$

Те дефиниције су дуго сматране јединим, а затим и најбољим уопштењем Хартлијеве информације.

Шенонова информација задржава ону новинарску особину вести према којој је оно што је више вероватно мање информативно и обрнуто. То се може разумети и на примерима узорака текстова. Српска азбука има $n_1 = 30$ слова, енглеска $n_2 = 26$, а знамо да се различити знакови у тексту различитих језика појављују са различитим вероватноћама. Просечна појава слова је n-ти део свих, мада је фреквенција појединог слова углавном различита од просека, од $1/n$ броја свих слова у алфабету. Ипак, када је $n_1 > n_2$, биће вероватноћа просечне појаве слова у првом тексту мања од таквог у другом, али ће Шенонова информација бити већа. Помоћу азбуке са више слова могуће је написати више различитих речи дате дужине.

Други пример шкртарења са Шеноновом информацијом откривамо и у познатој *ергогричкој теореми* за Марковљеве ланце. Укратко, када се информација преноси каналом везе, преносником надовезаним много пута, услед сметњи (шума) које су у пракси неотклоњиве, на крају преноса добијамо неку поруку чији код не зависи много од саме послате поруке, колико од природе канала. Као да природа сакрива сложенију (информативнију) поруку једноставнијом, помоћу сметњи. То бисмо имали и у дечијој игри „глувих телефона”, где свако дете у низу следећем на ухо тихо пренесе поруку од претходног. Када би сва деца била сличне нарави и када би их било довољно много у

[31] Claude Elwood Shannon (1916-2001), амерички математичар.

игри, онда би независно од почетне поруке коначна била, рецимо „мама”. Информација се расипа и не обнавља. Она не настаје ни из чега.

Шенонова информација такође има и особину конзервације само у инерцијалним системима. То можемо видети на примеру дискретне квантне информације Борнових вероватноћа

$$S = -\sum_k |\psi_k|^2 \ln|\psi_k|^2, \quad \sum_k |\psi_k|^2 = 1. \tag{1.87}$$

Узимајући извод дуж координате $\xi = x, y, z, ct$ добијамо

$$\partial_\xi S = -\sum_k (1 + \ln|\psi_k|^2)\partial_\xi |\psi_k|^2, \tag{1.88}$$

што значи да је Шенонова информација константна ($\partial_\xi S = 0$) када је расподела константна, тј. када се дуж координата (ξ) не мењају поједине вероватноће ($|\psi_k|^2$).

У случају случајних догађаја из континуума Ω, Шенонова информација је

$$S = -\int_\Omega |\psi|^2 \ln|\psi|^2 \, d\omega, \quad \int_\Omega |\psi|^2 \, d\omega = 1, \tag{1.89}$$

при чему су $\omega \subseteq \Omega$ подскупови. Таласна функција

$$\psi(x,t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar} \tag{1.90}$$

дефинише *стационарно* квантно стање. Наиме, лако проверавамо:

$$|\psi(x,t)|^2 = \psi^*(x,t)\psi(x,t) = \phi^*(x)\phi(x). \tag{1.91}$$

Зависност од времена је ишчезла. Просторни део ове таласне функције задовољава *временски независну* Шредингерову једначину за x-осу

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + U(x)\phi(x) = E\phi(x), \tag{1.92}$$

где је $U(x)$ потенцијална енергија, E је енергија система. То је диференцијална једначина другог реда са једном непознатом, не баш једноставна, али прилично детаљно истражена у математици.

Подсетимо се да су и у конкретним ситуацијама квантне механике решења једначине (1.92) добро позната. Општа решења су облика

$$\phi(x) = Ce^{\pm k(x-x_0)\pm if(x)}, \tag{1.93}$$

где су C, k, x_0 константе и $f(x)$ функција, које зависе од разматраног случаја. На пример, приметимо да код израчунавања вероватноће имагинарни део ишчезава, па можемо ставити $f(x) \equiv 0$, а затим бирамо почетак $x_0 = 0$. Ако је константа k позитивна испред остављамо минус да би $\phi(x)$ конвергирало када $x \to \infty$. Константу C одређујемо нормирањем на десној полуоси. Из $\int_0^\infty |\phi|^2 dx = 1$ следи $C = \sqrt{2k}$, па је

$$\phi(x) = \sqrt{2k}\, e^{-kx}, \quad x \ge 0. \tag{1.94}$$

Уврштавамо ϕ у (1.92) и налазимо

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)} \ge 0. \tag{1.95}$$

За ово решење, Шенонова информација је:

$$S = -\int_0^\infty |\phi|^2 \ln|\phi|^2 dx = 1 - 2k \ge 0, \tag{1.96}$$

а отуда $0 \le U - E \le \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Слично радимо и са осталим решењима (1.93).

Наведени пример са поентирањем на крају је приказ једноставне употребе Шенонове информације у анализи квантног система. Али и поред таквих наизглед лаких могућности, чини се да је физичари не користе довољно. То можда због њене непоузданости која се види из следећег примера.

Пример 1.2.5. *Навести пример добро дефинисане расподеле чија Шенонова информација дивергира.*

Решење. Познато је да први наведени ред дивергира, а други да конвергира:

$$A: \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{n\ln n} = \infty, \quad B: \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{n\ln^2 n} = b \in \mathbb{R}^+.$$

Коефицијенти овог другог подељени са b чине добро дефинисану расподелу вероватноћа. Међутим, Шенонова информација такве расподеле дивергира. Заиста:

$$S = -\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{bn\ln^2 n}\ln\frac{1}{bn\ln^2 n} = \sum_{k=2}^\infty \frac{\ln b + \ln n + \ln\ln^2 n}{bn\ln^2 n} =$$

$$= \sum_{k=2}^\infty \frac{\ln b}{bn\ln^2 n} + \sum_{k=2}^\infty \frac{\ln n}{bn\ln^2 n} + \sum_{k=2}^\infty \frac{\ln\ln^2 n}{bn\ln^2 n} \to \infty,$$

јер средњи збир дивергира заједно са A. □

Овде нећемо сасвим веровати у *поузданост* анализе помоћу Шенонове информације, плашећи се добрих расподела за које она може дати овакве лоше резултате. Други проблем са овом дефиницијом информације долази од њене ограничености на расподелу вероватноћа. Она је типична за један процес који из унапред датог скупа на случајан начин генерише исходе само по један, или један по један као у шаховској игри. Збир тих вероватноћа је један ($\sum P_k = 1$) јер је исход из датог скупа сигуран догађај. Међутим, природа не функционише на само тај начин.

1.2.5 Скаларни производ

Природа често паралелизује, кажемо *мултипроцесира*. На пример, у различитим деловима људског тела покрећу се различити процеси који контролишу функције јединственог организма на начин који сматрамо независним. То су рад срца и крвних судова, рад јетре, органа за варење, покретање руку и ногу, гледање, говор и многи други. Верујемо да неколико хиљада независних процеса раде у нашем телу стално.

О мултипроцесирањима живих бића сам написао књигу „Информација перцепције“ (в. [2]). Поједностављено речено, та се књига може сматрати и као проверавање само једне формуле која повезује слободу, интелигенцију и хијерархију:

$$\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}. \tag{1.97}$$

Као и у овој књизи и тамо се подразумева постојање различитих опција а „живо биће" је дефинисано својом способношћу да доноси одлуке. Број ℓ је *слобода* јединке, количина могућности коју јединка има захваљујући својим чулима и уопште својим перцепцијама. Вектор $\mathbf{i}$ је *интелигенција* јединке дефинисана као способност њеног кориштења датих могућности. Вектор $\mathbf{h}$ је *хијерархија* дефинисана као способност окружења да јединки ускрати њене могућности. Према томе, слобода живог бића је *скаларни производ* вектора његове способности и околних ограничења.

У књизи разматрана јединка је човек који живи у друштвеном систему и другим околностима. Такође, то је и мрав у мрављој колонији, или травка у травњаку. Формула (1.97) једнако важи и за ћелију јетре која је јединка у свом окружењу које чини околно тело живог бића. Са друге стране, она се такође не да нити извести неком дедукцијом из утврђених, па је у томе смислу слична формули кинематике о производу брзине и времена који даје пређени пут ($vt = s$), у време пре Галилеја[32].

У поменутој књизи је наговештено, али није инсистирано, да се израз за слободу (1.97) може проширити и на неживе ствари. Такво ширење нас формално неће довести у контрадикцију просто зато што тај израз представља у математици проверени и добро познати скаларни производ вектора. Друго, мора бити могуће проширење Шенонове формуле, јер васионом „владају" случајности и то на начин мултипроцесирања за чије описивање је Шенонова формула неподесна и недовољна. Коначно, формула (1.97) се своди на Шенонову када за компоненте првог вектора узмемо вероватноће неке расподеле а за компоненте другог логаритме тих вероватноћа.

Претпостављамо да су „жива бића" и „неживе твари" у неком дуализму, ако већ нису једно те исто, тако да док прва теже што већој слободи (ℓ), друга теже што мањој емисији информације (означићемо је L). Зато нам требају допуне поменуте формуле. У књизи (в. [2] пример 1.5.2, затим теорема 1.5.4.) је у примеру доказана једноставна импликација

$$(p_1 \ge p_2) \land (q_1 \ge q_2) \;\Rightarrow\; (p_1q_1 + p_2q_2 \ge p_1q_2 + p_2q_1), \tag{1.98}$$

која је затим поопштена у теорему о произвољним низовима. Две n-торке бројева $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ и $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ чине опадајуће уређене n-торке ако важе све неједнакости:

$$p_1 \ge p_2 \ge \dots \ge p_n, \quad q_1 \ge q_2 \ge \dots \ge q_n. \tag{1.99}$$

Тада је њихов скаларни производ

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n \tag{1.100}$$

максималан. Заменимо ли места било која два члана једног од низова, без промене осталих чланова, можемо добити само мању вредност скаларног производа. То је смисао поменуте теореме.

Последица је да Шенонова информација као скаларни производ низа вероватноћа и низа негативних логаритама одговарајућих вероватноћа представља максималан такав производ. Заменом места две вероватноће (или два логаритма) добио би се мањи резултат. Према томе, да бисмо избегли дивергенције попут оне у примеру 1.2.5, дефинисаћемо n-торке $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ тако да добијемо мањи скаларни производ.

Из исте импликације (1.98) следи да из обрнутог поретка уређења двочланих низова $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ следи мањи скаларни производ. Уопште, ако је

$$p_1 \ge p_2 \ge \dots \ge p_n, \quad q_1 \le q_2 \le \dots \le q_n \tag{1.101}$$

[32]Galileo Galilei (1564-1642), италијански математичар, физичар, астроном, филозоф.

тада опет због (1.98) важи неједнакост

$$(p_1q_2 + p_2q_1) + (p_3q_3 + \dots + p_nq_n) \ge (p_1q_1 + p_2q_2) + (p_3q_3 + \dots + p_nq_n).$$

Даље лако налазимо да је скаларни производ обрнуто уређених низова (1.101)

$$L = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \sum_{k=1}^{n} p_k q_k \tag{1.102}$$

минималан.

Пример 1.2.6. *Доказати импликацију (1.98).*

Доказ. Из претпоставке $p_1 \ge p_2$ и $(q_1 - q_2) \ge 0$ множењем имамо $p_1(q_1 - q_2) \ge p_2(q_1 - q_2)$ а након сређивања и закључак. □

Теорема 1.2.7. *Скаларни производ (1.102) је најмањи акко (1.101).*

Доказ. Када компоненте вектора $\mathbf{p}$ у производу (1.102) нису поредане на начин (1.101), пресложимо сабирке. Сабирање је комутативно. Претпоставимо даље да су компоненте вектора $\mathbf{p}$ уређене на дати начин а компоненте вектора $\mathbf{q}$ нису. Нека је q_k најмањи број од свих компоненти $\mathbf{q}$. Ако то није први члан, заменимо места q_1 и q_k у датом производу. Нови скаларни производ је мањи од претходног. Затим посматрајмо све чланове $\mathbf{q}$ осим првог и поновимо поступак, тако да се следећи најмањи члан нађе на другој позицији, при чему ће скаларни производ бити још мањи. Након n корака имаћемо све мањи производ (1.102) и на крају уређене чланове на начин (1.101). □

Зато што су сабирци скаларног производа комутативни, чланове датих n-торки можемо премештати у паровима, замењујући i-ти са j-тим чланом једне n-торке уз исту замену одговарајућег пара друге. Ако се након таквих премештања добије директна (1.99) или обрнута (1.101) уређеност компоненти, онда ћемо рећи да су дати вектори *адаптирани.* У случају Шенонове информације или максималне слободе ℓ из поменуте књиге, имамо позитивну односно директну адаптацију. У случају минималне слободе, у овој књизи поменутог принципа информације, имамо негативну односно обрнуту адаптацију. Радимо даље у складу са (1.9).

1.2.6 Лагранжијан

Полазећи од Хајзенбергових релација (1.8) добијамо минималан израз

$$L = \Delta p_x \Delta x + \Delta p_y \Delta y + \Delta p_z \Delta z - \Delta E \Delta t, \tag{1.103}$$

чија је вредност $\hbar$ у свим инерцијалним системима. Зато што је то заиста инваријанта инерцијалних кретања, у примеру 1.1.2 смо могли извести Лоренцове трансформације. Са друге стране, из истог смо добили и израз (1.9) који представља (поопштени) скаларни производ вероватноћа положаја и неодређености положаја. Слично смо могли добити и скаларни производ вероватноћа положаја и импулса. У оба случаја већој вероватноћи одговара мања неизвесност (у сабирку из L) па, према теореми 1.2.7, скаларни производ има минималну вредност. Према томе, за израз L важи принцип најмањег дејства (акције), иначе добро познат у физици кретања. Објаснићу.

Зато што, зависно од изабраних компоненти p_k и q_k, скаларни производ (1.102) даје најмању вредност, он формално опонаша *Лагранжову методу* у тражењу *једначина*

кретања. Ево објашњења а затим и доказа. Као што је познато из физике, разлика кинетичке (E_k) и потенцијалне (E_p) енергије назива се *Лагранжијан*

$$\mathcal{L} = E_k - E_p. \tag{1.104}$$

Овај израз је основа принципа најмањег дејства и *Ојлер-Лагранжових једначина* кретања, у даљем тексту О-Л једначина

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \tag{1.105}$$

где q одређује линију кретања која је у Декартовом правоуглом систему апсциса (x), ордината (y) или апликата (z). Предност ове методе над Њутновом је њена лакоћа генералисања на разне координате.

Пример 1.2.8 (Опруга)**.** *Наћи О-Л једначине кретања опруге.*

Решење. Кинетичка и потенцијална енергија утега на опрузи дуж x-осе дају:

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(E_k - E_p)}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}m\dot{x} = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx,$$

$$m\ddot{x} = -kx,$$

а то је тачно Њутнов израз $F = ma$. □

Пример 1.2.9 (Гравитација)**.** *Наћи О-Л једначине кретања тела масе m у гравитацији планете масе M.*

Решење. Кинетичка и потенцијална енергија у централно симетричном пољу су:

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{r}^2, \quad E_p = -G\frac{mM}{r},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = G\frac{mM}{r^2},$$

$$m\ddot{r} = G\frac{mM}{r^2},$$

а то је Њутнова гравитациона сила. □

Да бисмо извели О-Л једначине (1.105) посматрајмо вредност

$$A \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\, dt, \tag{1.106}$$

коју називамо *акциј*а или дејство. Физичка димензија A је (енергија)×(време). Овде радимо само са једном координатом, али је принцип исти и резултат се лако поопштава. За све могуће функције облика $q = q(t)$ ($t_1 \le t \le t_2$) са фиксираним крајњим тачкама, $q_1 = q(t_1)$ и $q_2 = q(t_2)$, тражимо ону која је *стационарна*, да даје локални минимум, максимум или превој акције A. То је поопштен, у математичкој анализи добро познат, метод тражења стационарних тачака помоћу нула функције извода.

Теорема 1.2.10. *Од свих функција $q(t)$ са фиксним крајевима, $q(t_1) = q_1$ и $q(t_2) = q_2$, она $q_0(t)$ за коју важи*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_0}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_0}, \tag{1.107}$$

је стационарна акција A (локални минимум, максимум или превој).

Доказ. Ако нека функција $q_0(t)$ даје стационарне (непромењене) вредности акције A, тада ће свака друга њој блиска функција и са истим крајњим тачкама давати у бити исто A, до апроксимација првог реда. За такву стационарну функцију посматрајмо функцију

$$q_x(t) \equiv q_0(t) + xf(t), \tag{1.108}$$

где $x \in \mathbb{R}$, а $f(t)$ испуњава услове $f(t_1) = f(t_2) = 0$. Израчунавамо:

$$\frac{\partial}{\partial x}A[q_x(t)] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x}\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_x}\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\right)dt. \tag{1.109}$$

Из претходне једначине имамо:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = f(t), \quad \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} = \dot{f}(t), \tag{1.110}$$

па (1.109) постаје

$$\frac{\partial}{\partial x}A[q_x(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x}f + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_x}\dot{f}\right)dt. \tag{1.111}$$

Интегрирамо други сабирак парцијално

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_x}\dot{f}\,dt = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_x}f - \int\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_x}\right)f\,dt, \tag{1.112}$$

па (1.111) постаје

$$\frac{\partial}{\partial x}A[q_x(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_x}\right)f\,dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_x}f\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{1.113}$$

Због граничних услова $f(t_1) = f(t_2) = 0$ последњи сабирак ишчезава. Даље користимо чињеницу да лева страна мора бити нула за произвољну функцију $f(t)$, јер претпостављамо да је $q_0(t)$ стационарна. Једини начин да то буде тачно је ако је вредност у загради (израчуната за $x = 0$) идентички једнака нули, односно ако важи (1.107). □

Приметимо да се у овом доказу Лагранжова функција $\mathcal{L}$ може заменити скаларним производом L, заменом (1.104) са (1.102), а да теорема остане тачна. Тада такође функција $q_0(t)$ са датим фиксним крајевима, представља стационарну вредност $\mathcal{L} = L$, ако важи О-Л једначина (1.107). Отуда закључак да се честица креће инерцијално да би скаларни производ, попут (1.103), био минималан.

Код инерцијалних система разликујемо две врсте опажања. Сопствену од стране посматрача који мирује у датом систему и релативну од стране посматрача у односу на који се дати систем креће. Сопствена и релативна опажања углавном нису једнака. Пошто је приоритетан принцип вероватноће (најчешће се реализује највероватније), релативне вероватноће су (углавном) мање од сопствених.

У следећем кораку је информација коју дефинишемо вероватноћом на различите начине, али углавном тражимо да је са већом вероватноћом добијемо мање. Не видим разлог да сада одустанемо од тих дефиниција, бар што се тиче сопствених посматрача. Међутим, ако би за релативне посматраче који опажају мању вероватноћу реализација информације била већа, онда би они опажали већу производњу и бржи ток времена, а мањи остатак нереализоване неизвесности. Васиона која има више релативних него сопствених посматрача тада би била брзо потрошена. Због закона одржања укупне неизвесности и информације, сва неизвесност васионе би и реално исцурела за веома кратко време. Васиона би настала, бљеснула и изгорела, све у једном тренутку.

Дакле, произвољна честица се креће путањама сопствених највећих вероватноћа и најмањих информација. Релативни посматрачи такве виде као смањене и вероватноће и информације. Систем не може спонтано прећи у такво стање да би смањио емисију информације, јер би прешао у стање мање вероватноће.

За разлику од неживих, жива бића доносе одлуке. Свеједно, слобода (1.97) узима само вредности од најмање, попут (1.103) када мања вредност компоненте интелигенције множи већу вредност компоненте хијерархије и обрнуто, па до највеће, где се множи мања са мањом и већа са већом. Минимум даје теорема 1.2.7 а максимум одговарајућа теорема из [2]. Према томе, трагове живота посматране твари откриће одступање од принципа најмањег дејства, дакле од трајекторија која су решења Ојлер-Лагранжове једначине (1.107), али не превелика. Видели смо да је та једначина последица принципа информације, а из истог следе и „љености” живих бића, које ће математика временом откривати у понашањима склоним једноставним шаблонима.

На пример, за човека невеликих коефицијената вектора интелигенције (IQ, мајсторство заната, дар за уметност и сл.) најоптималније за успех у послу је да све рутинско сведе на слепу послушност. Рецимо, ако у низу сабирака (1.97), прецизније

$$\ell = i_1 h_1 + i_2 h_2 + \dots + i_n h_n, \tag{1.114}$$

прва особина (ω_1) представља уредност у доласку на посао а друга (ω_2) планирање следећег радног дана, онда је најбоље да такав има што је могуће већу хијерархију по тим двема особинама, са што већим бројевима $h_1 = h(\omega_1)$ и $h_2 = h(\omega_2)$, те да што мање манипулише са њима смањујући бројеве $i_1 = i(\omega_1)$ и $i_2 = i(\omega_2)$. Тиме ће већи износ његових укупних способности

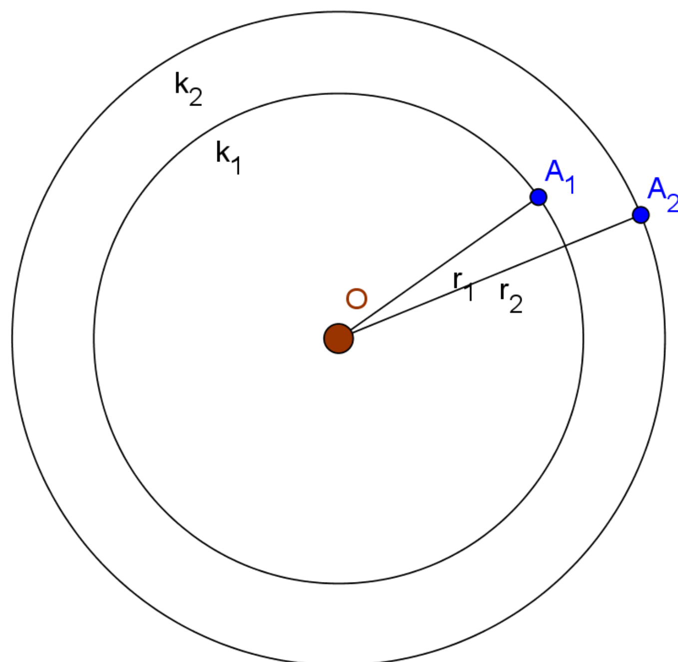
$$|\mathbf{i}| = \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_n^2}, \tag{1.115}$$

који је углавном константан, остати слободан за креативан рад. Верујем да ће будућа истраживања показати да су организовани менаџери, који цене радне навике и који се строго придржавају сатница и планова рада, успешнији. Нарочита потврда ове анализе биће откриће да такви менаџери, који врхунским радом, редом и дисциплином постижу врхунске резултате, заправо и не морају бити врхунски интелигентни људи.

1.2.7 Сателит

У наставку тестирамо претходне закључке. Разматрамо прво случај *кружења сателита* око планете, када су центрифугална и гравитациона сила уравнотежене, а локално мало окружење сателита представља (приближно) инерцијални систем.

У исходишту координатног система, у тачки O на слици 1.18, налази се центар планете масе M, око које ротирају два сателита A_1 и A_2 маса m_1 и m_2 на удаљеностима



Slika 1.18: Ротација око центра масе.

r_1 и r_2 по кружним[33] путањама k_1 и k_2. Одбојне центрифугалне силе које ствара ротација сателита у равнотежи су са привлачном силом гравитације и сателити клизе по својим кружницама не осећајући дејства тих сила. Они се налазе у бестежинском стању па према томе и у (криволинијском) инерцијалном кретању. Поставља се питање шта је са вероватноћама и информацијама сателита?

Доследно принципу вероватноће, сопствена вероватноћа сваког од сателита већа је од релативне оног другог. Такође, сопствена вероватноћа са сателита већа је од опажене на непокретној тачки којом сателит пролази током своје ротације, јер би се иначе могао зауставити у тој тачки (без дејства других сила или судара). Зато сателит не прелази спонтано из једне путање у другу, нити се зауставља.

Пример 1.2.11. *Израчунати брзине сателита.*

Решење. Центрифугална и *гравитациона сила* сателита масе m на удаљености r од центра масе M износе, редом:

$$F_c = \frac{mv^2}{r}, \quad F_g = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{1.116}$$

где је $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^2 гравитациона константа. Изједначавањем добијамо

$$v = \sqrt{GM/r}, \tag{1.117}$$

а затим r замењујемо са $r_1 < r_2$, и добијамо две различите брзине $v_1 > v_2$. Што је сателит даље креће се спорије, брзином обрнуто пропорционалном са $\sqrt{r}$. □

[33]Уместо кружница могли бисмо узети било које криве другог реда (елипсе, параболе или хиперболе) али би нам тада рачун био компликованији.

У некој непокретној (скоро) бесконачно далекој тачки, када $r \to \infty$ и $v_\infty = 0$, не осећа се дејство гравитације. Посматрано са тог далеког места, проћи ће релативан временски интервал

$$\Delta t_\infty = \frac{\Delta t_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx (1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})\Delta t_A, \tag{1.118}$$

док на сателиту A који клизи тангенцијалном брзином (1.117) по кружници са полупречником r прође интервал времена Δt_A. На датом сателиту интервал Δt_A је

$$\Delta t_A = \frac{\Delta t_r}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.119}$$

где је Δt_r интервал времена мерен сатом који мирује на непокретној тачки на висини којом пролази сателит. Композицијом последња два израза добијамо

$$\Delta t_\infty = \frac{\Delta t_r}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx (1+\frac{v^2}{c^2})\Delta t_r. \tag{1.120}$$

Према томе, посматрано са места изван гравитације ($r \to \infty$), фиксна тачка на висини r од центра поља има *успорен ток времена* према (приближној) формули

$$\Delta t_\infty = \frac{\Delta t_r}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}} \approx (1+\frac{GM}{rc^2})\Delta t_r. \tag{1.121}$$

Ово ћемо објаснити на још један начин у следећем поднаслову, а касније ћемо показати да се једнак резултат добија и из опште теорије релативности.

Време успорава сразмерно са (1.121), па закључујемо да са истим коефицијентом опада и релативна производња информације. Промену вероватноће ћемо процењивати променама релативне фреквенције и таласне дужине (извора) исте светлости на два различита места. При томе ћемо се ослонити на позната мерења и потврде опште теорије релативности у вези са гравитационим *црвеним помаком*.

Посматрано са места изван домашаја гравитације, са бесконачне удаљености од центра поља, формула за црвени помак фреквенције $\nu = c/\lambda$ и према томе за енергију $E = h\nu$ фотона, гласи

$$\nu_\infty = \nu_r\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}} \approx \nu_r(1-\frac{GM}{rc^2}), \tag{1.122}$$

где је r висина фиксне тачке извора фотона. То је позната формула, али је и сасвим очекивана из нове (1.121), јер је фреквенција реципрочна времену. Колико пута релативно време тече спорије, толико је пута мања фреквенција. Таласна дужина је толико пута већа, па је

$$\lambda_\infty = \frac{\lambda_r}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}} \approx \lambda_r(1+\frac{GM}{rc^2}), \tag{1.123}$$

где је λ_r таласна дужина (исте) емитоване светлости извора који мирује на висини r, опажене као λ_∞ са места ван гравитационог поља. Колико пута је опажена таласна дужина већа толико пута је вероватноћа мања.

Овај последњи закључак смо већ расправљали у оквиру квантне механике. Што је већа таласна дужина, више је развучено место могућег налажења фотона, па је вероватноћа његовог налажења на датом месту мања. Тамо то није чудно, али овде изгледа изненађујуће и помало „неприхватљиво“. То је зато, верујем, што класична механика толико бежи од случајности да сада постаје догма.

1.2.8 Вертикалан пад

У условима слабог гравитационог поља (Њутновог поља), када слободан пад по кружној путањи сателита још увек можемо сматрати инерцијалним кретањем, брзина фиксне тачке којом сателит пролази расте са приближавањем центру гравитације. У односу на посматрача из скоро бесконачно далеког сателита успорава релативно време и емисија информације. Дакле, тумачећи настанак времена стварањем информације, долазимо до закључка да Њутнова механика предвиђа успоравање времена унутар гравитације. Штавише, показује се да је то у складу са Ајнштајновом општом теоријом релативности!

Ајнштајн, а затим и Шварцшилд[34] су 1916. године показали да се из опште теорије релативности апроксимацијом добија класична теорија гравитације, али сада имамо и обрнути поступак, извођење последица Ајнштајнове опште теорије из класичне Њутнове. Међутим, није принцип еквиваленције неопходан за такво поопштавање. Довољна су специјална теорија релативности и класична механика.

Полазећи од Њутновог закона, држимо центар масе M и даље у исходишту, а тело масе m нека је у слободном паду, рецимо (може и другачије) вертикално ка том центру. Падање тела масе m производи рад (гравитационе силе тела M) који се претвара у кинетичку енергију па маса m расте. Према Галилејевом принципу еквиваленције инерционе и гравитационе масе, порастом масе расте и јачина гравитационе силе. Нека на путу dr маса порасте за dm. Тада имамо:

$$dmc^2 = -\frac{GMm}{r^2}dr,$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{GM}{r^2c^2}dr,$$

$$\ln m = \frac{GM}{rc^2} + \text{const.}$$

$$m = m_0 e^{GM/rc^2}, \tag{1.124}$$

где би маса тела које пада била m_0 у одсуству гравитације.

Развојем израза у Маклоренов ред и занемаривањем виших степена малих чланова, видимо да је коефицијент дилатације времена једнак са коефицијентом повећања масе. Са истом апроксимацијом се показује да светлост која улази у гравитационо поље мења фреквенцију једнако као што време у гравитационом пољу успорава због смањивања ентропије.

Једначина (1.224) важи за гравитациона поља где је маса M довољно већа од m (убрзање већег тела је занемариво у односу на убрзање мањег), када је центар маса у центру већег тела а да још увек можемо имати инерцијалне системе. Маса фотона је $\hbar\omega/c^2$, фреквенција светлости у бесконачности је ω_0. Док светлост путује у гравитационом пољу (в. [9]) њена фреквенција је $\omega = \omega_0 e^{GM/rc^2}$. Обрнуто, ставимо ли да је фреквенција светлости ω' на површини звезде полупречника R, онда ће она удаљавајући се од звезде постати фреквенција

$$\omega = \omega' e^{-GM/Rc^2} \approx \omega'(1 - \frac{GM}{Rc^2}). \tag{1.125}$$

[34] Karl Schwarzschild (1873-1916), немачки физичар и астроном.

Видели смо да је то позната формула за гравитациони *црвени помак.* Он овде такође указује на нижу релативну фреквенцију на површини звезде.

Унутар гравитационог поља не можемо синхронизовати сатове као у специјалној релативности, али то можемо у бесконачности. Низ осцилација таласа светлости стиже из бесконачности на удаљеност r од центра, са почетном фреквенцијом ω_0 и трајањем једне осцилације $\Delta t = 2\pi/\omega_0$. Мерено сатом у гравитационом пољу, протекло време такође је Δt, јер су одлагања потребна за две фазе таласа једнака.

Међутим, гравитација делује на фреквенцију светлости. То се види из претходног, да се локална фреквенција светлости мења у односу на бесконачност. Са удаљеног инерцијалног система гледано, локална фреквенција постаје $\omega_0 \cdot e^{GM/rc^2}$, а локално трајање једне фазе таласа $\Delta t \cdot e^{-GM/rc^2}$. Како временски интервал мерен локално износи Δt, то локални сат успорава у односу на сат у бесконачности. Да бисмо добили време у бесконачности морамо множити локално време са фактором e^{GM/rc^2}.

Слично дилатацији времена, помоћу фреквенција светлости можемо израчунати и контракцију дужина у присуству гравитационог поља. Нека је таласна дужина светлости у бесконачности λ_0 а растојање које она пређе за јединично време $n\lambda_0$. Док се приближава удаљености r, она још увек прави n осцилација у јединици времена. Како се локална фреквенција повећава, локална таласна дужина постаје $\lambda_0 e^{-GM/rc^2}$ посматрана из бесконачности, а растојање које талас пређе за јединицу времена постаје $n\lambda_0 e^{-GM/rc^2}$. Дужина је растојање које светлост пређе за дато време. Упоређена са дужином у бесконачности, локална дужина се скраћује. Дакле, да би је свели на дужину у бесконачности, локалну дужину (у правцу извора поља) морамо множити са фактором e^{-GM/rc^2}.

Другим ознакама, ако су за посматрача у гравитационом пољу дужина (у правцу промене јачине поља) и време Δr_0 и Δt_0, исте ће посматрач изван гравитационог поља вредновати са Δr и Δt, при чему је:

$$\Delta r = \Delta r_0 \exp\left(-\frac{GM}{rc^2}\right), \quad \Delta t = \Delta t_0 \exp\left(\frac{GM}{rc^2}\right). \tag{1.126}$$

То су изрази за контракцију дужина (у правцу гравитационог поља) и дилатацију времена познати и у општој теорији релативности у случају слабијих поља (мало M или велико r). Маклореновом апроксимацијом их сводимо на:

$$\Delta r = \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)\Delta r_0, \quad \Delta t = \left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right)\Delta t_0. \tag{1.127}$$

Може се показати да се исти изрази добијају и из Шварцшилдове метрике

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2\, d\theta^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2, \tag{1.128}$$

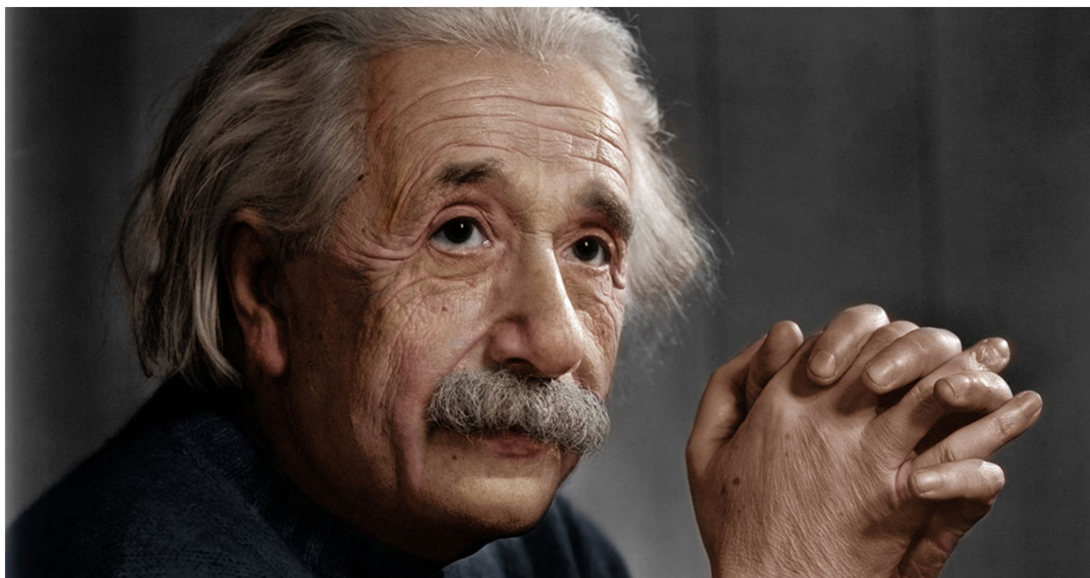
која представља решење Ајнштајнових једначина поља (опште теорије релативности), у сферним координатама $Or\varphi\theta$ за централно симетрично гравитационо поље.

Надам се да ова израчунавања и објашњења довољно добро сведоче о сагласности принципа вероватноће и овде изведених последица са признатом физиком механике.

1.2.9 Ајнштајнова гравитација

Ајнштајн је знао рећи: „Ако нешто не умеш да објасниш, онда то и не разумеш“. Зачудо, јер тај човек је открио једну од најсложених и најтеже објашњивих теорија

егзактних наука уопште. Тензорски рачун, који је у његово време био у зачетку, а данас је постао права мора не само теоријских физичара, приближити чак и бољим студентима математике није уопште једноставна ствар. Па ипак, то је могуће објашњавати и лаицима.



Slika 1.19: Алберт Ајнштајн.

Ајнштајн је 1915, а затим и 1916. године објавио систем једначина:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.129}$$

где индекси μ и ν означавају три просторне и једну временску координату. Оно што произилази из тих једначина Ајнштајн је назвао „теоријом поља“, али ми то данас радије називамо његовом „теоријом гравитације“ или „теоријом релативности“. На левој страни једнакости је тензор $G_{\mu\nu}$ који представља „чисту“ геометрију, а на десној страни је тензор $T_{\mu\nu}$ који представља материју. Коефицијент између $8\pi G/c^4$ само усклађује физичке димензије та два. Према томе, ове *једначине поља* имају сасвим просто значење: геометрија простора дефинише физичку материју и обрнуто, материја дефинише простор.

Док је трагао за општом теоријом релативности, Ајнштајн се обратио свом школском другу Гросману[35] за помоћ око учења тензорског рачуна, тада нове области математике. Привукла га је идеја *коваријантности* (и дуално контраваријантности), која је основа тензорског рачуна, а заправо има значење слично принципу релативности. Тензори су такве величине око чијег ће се значења сви посматрачи моћи сложити. Коваријантност је и више од тог пуког компромиса, јер системи бројева које називамо тензорима након трансформација координата у потпуности чувају форму закона којег изражавају. Зато је Ајнштајн код Гросмана тражио да системи бројева $G_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ буду тензори.

Њих двојица су се брзо сложили да на левој страни (1.129) треба стајати неки једноставни тензор који дефинише кривину простора, попут Ричијевог[36] тензора $R_{\mu\nu}$

[35] Marcel Grossmann (1878-1936), мађарски професор математике.

[36] Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), италијански математичар и оснивач тензорског рачуна.

или његовог извођења који се не би мењао премештањем у простор-времену, јер на десној страни може стајати нека непромењлива планета.

Ричи је до свог тензора дошао настојећи да реши, поједностављно речено, следећи проблем. Ако мрав живи на површини сфере, како он помоћу мерења и израчунавања може сазнати да је његов простор закривљен? Нашао је да би то (углавном) могао бити сложени израз, који је два пута коваријантан тензор

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^{\ell}} - \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{i\ell}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{m}_{ij}\Gamma^{\ell}_{\ell m} - \Gamma^{m}_{i\ell}\Gamma^{\ell}_{jm}, \tag{1.130}$$

што значи да и након евентуалне трансформације координата из једног система у други, тај тензор одржава својства две произвољне координате дате доњим индексима. У свету физике то би значило да различити релативни посматрачи имају једнака виђења закривљености простора представљене бројевима (1.130).

Уопште, индекси i, j, ℓ, m означавају сваки онолико координата колико актуелна геометрија има димензија. Због Ајнштајнове *конвенције о сабирању* тензора (сабира се по поновљеном горњем и доњем индексу) формула (1.130) представља систем од $4 \times 4 = 16$ парцијалних диференцијалних једначина, од којих се неке понављају. Да ствар буде још сложенија у тим једначинама су Кристофелови[37] симболи

$$\Gamma^{m}_{ij} = \frac{1}{2} g^{mk} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}} \right), \tag{1.131}$$

који, успут речено и нису тензори. Тензор $g_{\mu\nu}$, назван *метрички тензор*, чине коефицијенти криволинијске метрике дефинисане општим изразом

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{1.132}$$

Овај израз поопштава Питагорину теорему. Претходно ($g^{\mu\nu}$) и ово ($g_{\mu\nu}$) су узајамно инверзне матрице.

Зато што изводи (деривације, промене) Ричијевог тензора $R_{\mu\nu}$ нису нуле, а тензор $T_{\mu\nu}$ на десној страни једначина поља представља стационарну (непромењливу) материју, Ајнштајн је за леву страну својих једначина смислио тензор

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{1.133}$$

Једноставно речено, према Ајнштајну је требало бити да је $G_{\mu\nu}$ најједноставнији тензор који садржи Ричијев тензор, али који се не мења након (тензорског) диференцирања. Скалар Λ је константа интеграције, која је убрзо добила назив *космолошка константа.* Наравно да се међународна заједница физичара и математичара одмах окомила на Ајнштајна и на његов начин „бруталног скрнављења егзактних наука“ промоцијом овако „склепаних“ једначина. Негативне критике су дошле и од његовог пријатеља Гросмана.

Да ствар буде још гора, Ајнштајн је „намонтирао” и десну страну својих једначина. Он је за $T_{\mu\nu}$ рекао да представља тензор енергије, два пута коваријантан, а пре њега енергија није сматрана чак ни вектором. Тензорске величине без индекса (нултог реда) су скалари, ако оне имају исте вредности за све релативне посматраче. До 20. века се сматрало да су нпр. температура и енергија засигурно тензори нултог реда. Вектор је тензор првог реда ако се његове вредности држе и преласком на други

[37] Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), немачки математичар и физичар.

систем координата. На пример, оријентисана дуж јесте вектор, али није тензор, јер ће ротацијом променити смер као своју битну одредницу. Напротив, вектори сила које подупиру неку грађевину су тензори ако та грађевина изгледа једнако стабилном и када је посматрана из различитих система. Тензори другог реда су (неке) матрице, трећег реда су блокови матрица слагани по дубини, и тако даље.

Прогласити енергију два пута коваријантним тензором, почетком 20. века, било је још увек несмотрено али не баш сасвим без основе. Од раније је било примећено да је енергија четврта компонента вектора импулса (количине кретања). Требало је ствар само обрнути и рећи да су три компоненте вектора импулса заправо просторне компоненте „вектора“ енергије. Затим је требало поверовати да x компонента енергије делује на y компоненту и уопште μ-та на ν-ту интензитетом $T_{\mu\nu}$. Последњи корак, рећи да тензор $T_{\mu\nu}$ представља материју био је због тада познатог $E = mc^2$ лакши.

Ајнштајн није много марио за експерименте. Од три теста која је он предложио за општу теорију, први - да сатови успоравају у гравитационом пољу - није потврђен за његовог живота. Штавише, први експерименти су оспоравали његово откриће. Његово друго предвиђање, да би светлост са далеких звезда требала скретати у гравитационом пољу, након мерења 1919. године, учинило га је славним, мада се касније показало да су таква мерења двосмислена и сумњива. Трећи тест је био најбољи. Због малих аномалија орбите Меркура око Сунца сагласних са прорачунима из опште теорије, Абрахам Пајс је рекао „Ајнштајн је у праву“ и „Природа разговара са њим“.

Данас знамо да је то тачно. На пример, радио сигнали из летелице Касини на путу за Сатурн потврдили су предвиђања теорије релативности са великом тачношћу. Али Ајнштајн не би због тога био импресиониран. Он је веровао да му је теорија исправна зато што је конзистентна, једноставна и лепа. „Убеђен сам да структуре чисте математике омогућавају открића концепта и закона који их повезују, што нам даје кључ разумевања феномена природе“, рекао је 1933. године.

1.2.10 Шварцшилдово решење

Данас је тешко сагледати неразумевање Ајнштајна од стране научне заједнице. У то време једва да су људи од науке и чули за нееуклидске геометрије, а још мање за тензорски рачун. Ипак, само месец дана након објављивања опште теорије релативности, немачки физичар и астроном Карл Шварцшилд је дошао до првог тачног решења једначина (1.129), ако не рачунамо тривијално решење за раван простор. Одмах након објављивања свог рада 1916. године, Шварцшилд је умро у Првом светском рату као немачки војник. Мање је познато да је независно и у исто време и немачки математичар Јоханес Дросте (1886-1963) (в. [11]) дошао до сличног решења.

Шварцшилдово решење важи за централно симетрична гравитациона поља, попут онога које ствара Сунце, ако занемаримо утицај планета. Зато га има смисла тражити у метрици сличној (1.128), мало општијој (в. [10]).

Пример 1.2.12. *Извести Шварцшилдову метрику из једначина поља, полазећи од*

$$ds^2 = -e^{2B(r)}c^2dt^2 + e^{2A(r)}\,dr^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + r^2\,d\theta^2, \tag{1.134}$$

где су $A(r)$ и $B(r)$ непознате функције удаљености r.

Решење. Метрички тензор $(g_{\mu\nu})$ и њему инверзан $(g^{\mu\nu})$ имају матрице, редом:

$$\begin{pmatrix} -e^{2B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -e^{-2B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

Користимо обе за израчунавање Кристофелових симбола (1.131). Ставимо $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$ и $x^3 = \theta$, па имамо редом:

$$\Gamma^1_{11} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2} g^{1k} \left(\frac{\partial g_{k1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} e^{-2A} \frac{\partial e^{2A}}{\partial r} = \frac{1}{2} e^{-2A} e^{2A} \frac{\partial(2A)}{\partial r} = \frac{\partial A}{\partial r} = A'(r),$$

$$\Gamma^1_{11} = A', \quad \Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^1_{13} = 0, \quad \Gamma^1_{10} = 0.$$

Због симетрије доњих индекса, $\Gamma^m_{ij} = \Gamma^m_{ji}$, непосредно добијамо још три. Даље је:

$$\Gamma^1_{22} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2} g^{1k} \left(\frac{\partial g_{k2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} e^{-2A} \frac{\partial(r^2\sin^2\theta)}{\partial r} = -e^{-2A} r \sin^2\theta,$$

$$\Gamma^1_{33} = -e^{-2A} r, \quad \Gamma^1_{00} = e^{2(B-A)} B'(r),$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \operatorname{ctg}\theta,$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{22} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = B'(r),$$

а сви остали су нуле. Затим израчунавамо Ричијев тензор (1.130), редом:

$$R_{11} = \sum_{\ell=0}^{3} \left[\frac{\partial \Gamma^\ell_{11}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{1\ell}}{\partial x^1} + \sum_{m=1}^{4} \left(\Gamma^m_{11}\Gamma^\ell_{\ell m} - \Gamma^m_{1\ell}\Gamma^\ell_{1m} \right) \right] =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{3} \left[\frac{\partial \Gamma^\ell_{11}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{1\ell}}{\partial x^1} + \left(\Gamma^1_{11}\Gamma^\ell_{\ell 1} - \Gamma^1_{1\ell}\Gamma^\ell_{11} \right)_{m=1} - (\Gamma^2_{1\ell}\Gamma^\ell_{12})_2 - (\Gamma^3_{1\ell}\Gamma^\ell_{13})_3 - (\Gamma^0_{1\ell}\Gamma^\ell_{10})_0 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{r} A' \right]_{\ell=2} + \left[\frac{1}{r} A' \right]_{\ell=3} + \left[-B'' + A'B' - (B')^2 \right]_{\ell=4},$$

$$R_{11} = -B'' - (B')^2 + A'B' + \frac{2}{r} A',$$

$$R_{22} = \left[1 - e^{-2A}(1 - rA' + rB') \right] \sin^2\theta,$$

$$R_{33} = 1 - e^{-2A}(1 - rA' + rB'),$$

$$R_{00} = \left[B'' + (B')^2 - A'B' + \frac{2}{r} B' \right] e^{2(B-A)}.$$

Ричијев скалар добијамо контракцијом:

$$R=\sum_{\mu=0}^{3}R_{\mu\mu}=-2e^{-2A}\left[B''+\left(B'+\frac{2}{r}\right)(B'-A')+\frac{1}{r^2}\left(1-e^{2A}\right)\right].$$

Ови резултати улазе у Ајнштајнов тензор (1.129):

$$G_{11}=\frac{1}{r^2}(1+2rB'-e^{2A}),$$

$$G_{22}=r^2e^{-2A}\left[B''+\left(B'+\frac{1}{r}\right)(B'-A')\right]\sin^2\theta,$$

$$G_{33}=r^2e^{-2A}\left[B''+\left(B'+\frac{1}{r}\right)(B'-A')\right],$$

$$G_{00}=-\frac{1}{r^2}e^{2(B-A)}\left(1-2rA'-e^{2A}\right).$$

За последњи можемо приметити да је

$$G_{00}=\frac{1}{r^2}e^{2B}\frac{d}{dr}\left[r\left(1-e^{-2A}\right)\right], \tag{1.135}$$

што ће се показати корисно касније. Толико о левој страни једначина поља.

На десној страни (1.129) је тензор енергије[38]. Претпоставићемо да је енергија која генерише гравитацију унутар лопте (планете, звезде) полупречника r_0 са центром у исходишту, са густином $\rho(r)$ унутар лопте и нулом изван. Познато је да је тензор енергије за савршен флуид у термодинамичкој равнотежи облика

$$T_{\mu\nu}=\left(\rho+\frac{P}{c^2}\right)u_\mu u_\nu+Pg_{\mu\nu}, \tag{1.136}$$

где је $\rho=\rho(r)$ густина у килограмима по кубном метру, $P=P(r)$ је хидростатички притисак у паскалима, $u_\mu=dx_\mu/dt$ су компоненте 4-брзине флуида, а $g_{\mu\nu}$ је метрички тензор. За статичан флуид је $u_1=u_2=u_3=0$, па је четврта компонента $(u_0)^2=c^2e^{2B}$, што следи из $g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu=-c^2$. Према томе, тензор енергије има не-нулте компоненте:

$$T_{11}=Pe^{2A},\quad T_{22}=Pr^2\sin^2\theta,\quad T_{33}=Pr^2,\quad T_{00}=\rho e^{2B}.$$

Стављајући то све у Ајнштајнову једначину (1.129), за индексе $\mu\ne\nu$ добијамо тривијално $0=0$, а за $\mu=\nu=2$ и $\mu=\nu=3$ добијамо исту једначину. Занимљиве су само:

$$\begin{cases}\mu\nu=11: & \frac{1}{r^2}(1+2rB'-e^{2A})=\frac{8\pi G}{c^4}Pe^{2A},\\ \mu\nu=22: & e^{-2A}\left[B''+\left(B'+\frac{1}{r}\right)(B'-A')\right]=\frac{8\pi G}{c^4}P,\\ \mu\nu=00: & \frac{1}{r^2}e^{2B}\frac{d}{dr}\left[r\left(1-e^{-2A}\right)\right]=\frac{8\pi G}{c^4}\rho e^{2B}.\end{cases}$$

Из четврте (нулте) следи:

$$A(r)=-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right),\quad M=\int 4\pi r^2\frac{\rho(r)}{c^2}\,dr.$$

Узимамо да је $M(0)=0$. Затим, из $E=mc^2$ следи да је ρ/c^2 густина масе, па $M(r)$ можемо интерпретирати као укупну масу лопте полупречника r.

[38]Stress–energy tensor: https://en.wikipedia.org/wiki/Stress%E2%80%93energy_tensor

На крају решавамо прву једначину ($\mu\nu = 11$) када је $r > r_0$. Изван лопте (планете или звезде), маса M је константна, притисак је нула (у вакууму $P = 0$), па имамо:

$$1 + 2rB' - e^{2A} = 0, \quad e^{2A} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1},$$

$$B(r) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \frac{2GM}{r^2c^2}\,dr = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} d\left(-\frac{2GM}{rc^2}\right),$$

$$B(r) = \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right),$$

$$e^{2B} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}.$$

Према томе, коначно решење за (1.134) је Шварцшилдова метрика (1.128). □

Када се уведе ознака $r_s = 2GM/c^2$ која се назива *Шварцшилдов полупречник*, метрика (1.134) се може писати

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2). \tag{1.137}$$

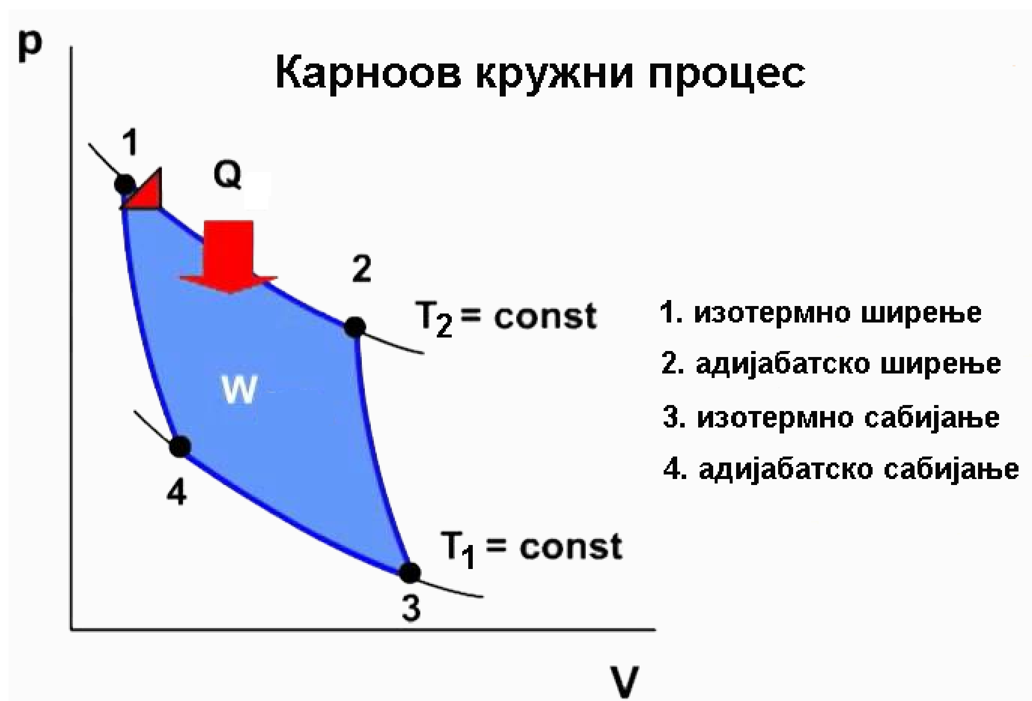
На удаљености r_s од центра масе[39] је *хоризонт догађаја*, сфера унутар које се налази *црна рупа* (black hole). То је сфера на чијој површини релативно време стоји, радијалне дужине (ка центру гравитације) ишчезавају, енергије и масе тела које би се на њој нашле постају бесконачне, и која је заправо последица сингуларитета саме метрике.

Шварцшилдова метрика је добијена низом поједностављења, почев од Ајнштајнове идеје да је васиона детерминистички уређена (да је 4-Д) па до приближне процене тензора (1.136) савршеним флуидом. Већ је познато да она због тога има непрецизности око поменутог сингуларитета, као и да има проблем са законом одржања енергије. Међутим, она је још увек најбоља позната апроксимација природе.

[39] Земљин $r_s \approx 9$ mm, Сунчев $r_s \approx 3$ km.

1.3 Ентропија

Лазар Карно[40], познат и као организатор победе у француској револуцији, 1803. године открио је да природни процеси имају неку унутрашњу склоност расипања корисне енергије. Желећи да дизајнира машину максималне ефикасности описивао је кружни процес стискања и ширења гаса у четири такта: 1. изотермно (при константној температури T) ширење, 2. адијабатско (при константној топлоти Q) ширење, 3. изотермно сабијање и 4. адијабатско сабијање. Ове четири фазе које се називају Карноов кружни процес приказује слика 1.20. Из таквих радова је настала грана физике данас позната као *термодинамика*.



Slika 1.20: Дијаграм запремине V и притиска p.

Развијајући сличне идеје Клаузијус[41] је од 1850. године анализирао изоловане системе у термодинамичкој равнотежи. Он је 1865. године у физику увео појам *ентропије*[42] (S) дефинишући је као енергију која се више не може претворити у слободан рад (W). У термодинамици је ентропија и данас величина која представља недоступност топлотне енергије (Q) за претварање у механички рад, која се често интерпретира као степен нереда или случајности датог физичког система.

Након тога су научници попут Болцмана[43], Гибса[44] и Максвела[45] ентропији дали статистичко значење. Термодинамичка дефиниција ентропије описује њену употребу у експериментима, док статистичка развија тај концепт, дајући му дубље значење.

[40] Lazare Carnot (1753-1823), француски политичар, инжењер и математичар.
[41] Rudolf Clausius (1822-1888), немачки физичар и математичар.
[42] грч. $\epsilon\nu\tau\rho o\pi\eta$ - обрт ка унутра.
[43] Ludwig Boltzmann (1844-1906), аустријски физичар и филозоф.
[44] Josiah Willard Gibbs (1839-1903), амерички инжењер, физичар и математичар.
[45] James Clerk Maxwell (1831-1879), шкотски математички физичар.

1.3.1 Термодинамика

Концепт ентропије који је произашао из *Карноовог циклуса* је апстрактан, није експерименталан. На слици 1.20 је приказан кружни термодинамички циклус преноса топлоте Q из стања више у стање ниже температуре T и обрнуто, где је $T_1 < T_2$. Топлота Q_2 са температуре T_2 прелази у хладни резервоар температуре T_1 у топлоту Q_1. Према Карноу, рад W може произвести само онај систем у којем се мења температура, а он би требао бити нека функција разлике температура и апсорбоване топлоте. Прецизније:

$$W = \left(\frac{T_2 - T_1}{T_2}\right) Q_2 = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q_2 \tag{1.138}$$

је максимални рад који топлотна машина може произвести.

Међутим, Карно је погрешно узимао да је $Q_2 = Q_1$ јер је тада актуелна теорија калорија сматрала да у сваком случају важи закон одржања топлоте. Тек након Клаузијуса и Келвина[46] ми данас знамо да је заправо $Q_2 > Q_1$, а отуда имамо и апсолутну, Келвинову скалу температура. Рад који произведе систем је разлика између апсорбоване топлоте топлијег резервоара и топлоте предате хладнијем:

$$W = Q_2 - Q_1. \tag{1.139}$$

Из претходне и ове једнакости (у случају максималног рада) следи:

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0. \tag{1.140}$$

где је са $\Delta S = S_2 - S_1$ разлика неке непознате функције која има физичку димензију топлоте подељене температуром. Ова једнакост потврђује *први закон термодинамике*: укупна енергија изолованог система је константна. Енергија се може трансформисати из једног облика у други, али не може настати из ничега нити може нестати.

Такође, једнакост (1.140) имплицира да постоји нека функција стања

$$S = \frac{Q}{T}, \tag{1.141}$$

која не мења вредност (конзервирана је) током (оптималног) Карноовог циклуса. Ту функцију је Клаузијус назвао ентропијом. Даља открића у овој области учинио је Болцман откривши да је логаритам броја $|\omega|$, начина једноликог распоређивања ω који су потскуп Ω свих начина рапоређивања гаса у соби, једнак Клаузиусовој ентропији

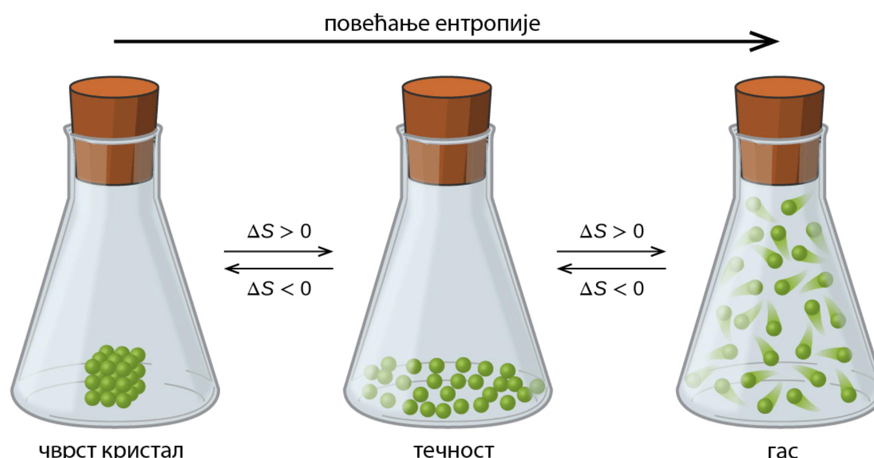
$$S = k_B \ln |\omega|, \tag{1.142}$$

где је $k_B = 1,38{\cdot}10^{-23}$ m^2 kg s^{-2} K^{-1} Болцманова константа (важи за природни логаритам, са базом $e \approx 2,71828$). До броја $|\omega|$ воде они распореди ω који су највероватнији, а то су равномерни распореди по свим могућим позицијама молекула. Наиме, на $n \in \mathbb{N}$ молекула има $n! = 1 \cdot 2 \dots n$ пута више равномерних распореда од рецимо распореда истих молекула у гомили. Зато што је Болцманова ентропија максимална за расуте гасове, зато понекад кажемо да ентропија представља количину нереда.

На слици 1.21 је приказано повећање Болцманове ентропије $\Delta S = S_2 - S_1$ из вредности S_1 у S_2 које се дешава преласком супстанце из чврстог у течно и даље у гасовито стање.

[46] William Thomson, 1st Baron Kelvin (1824-1907), шкотско-ирски математичар и физичар.

Слично се дешава у спонтаном процесу испаравања, када молекуле слободне да иду у било којем правцу заузимају све већу запремину. То је данас добро познато и свима нам изгледа сасвим једноставно. Мање је познато да је Болцман извршио самоубиство и то не због тога што је полудио, већ зато што се није могао носити са исмевањем својих колега физичара који су се тада ругали његовом наводном открићу.



Slika 1.21: Промена ентропије.

У обрнутом процесу на истој слици 1.21, преласком из гасовитог у чврсто стање, ентропија се смањује. Расуте молекуле гаса се неће тек тако сабити на гомилу, па је за смањивање ентропије потребна додатна енергија. Слично томе, када кристална посуда падне и разбије се, ентропија се повећа, али није могуће њено спонтано враћање на нижу вредност, односно враћање кристала у претходно неоштећено стање.

Уопште, када једнако вероватне исходе поделимо у групе, више реализација биће у групи са више исхода. На пример, у случају бацања фер новчића два пута, могући исходи су једнако вероватни елементи скупа $\Omega = \{ПП, ПГ, ГП, ГГ\}$. Исход да је два пута пало писмо је подскуп $\omega_1 = \{ПП\}$, а исход да је пало и писмо и глава је подскуп $\omega_2 = \{ПГ, ГП\}$. Како други подскуп има више елемената, $|\omega_1| = 1$ а $|\omega_2| = 2$, он ће се чешће реализовати. То оставља утисак да природа радије реализује оне случајне догађаје који имају више (једнако вероватних) опција, као да и она воли слободу, што је такође последица принципа вероватноће.

Знамо да природа тежи стањима веће ентропије, као на слици 1.21, а то значи и Болцманове ентропије (1.142), односно логаритма броја $|\omega|$ који је број исхода већег од могућих распореда. То је смисао *другог закона термодинамике*: укупна ентропија изолованог система може само расти временом. Она може остати константна у идеалном случају када је систем у стању равнотеже, у стабилном стању или када је подвргнут реверзибилном (повратном) процесу. Природни процеси спонтаног повећања ентропије се називају иреверзибилнима (неповратнима), а због њихове доминације се прошлост сматра несиметричном са будућношћу. Спонтану тежњу природних система да очувају или повећају ентропију називамо *принципом ентропије*.

1.3.2 Информација ентропије

Вероватноћа „већег“ распореда (неког исхода из „већег“ скупа исхода) је

$$P = \frac{|\omega|}{|\Omega|}, \tag{1.143}$$

где је $|\Omega|$ број свих могућих исхода. Према томе, веће учешће вероватнијих (ω) у скупу свих исхода (Ω) даје већу вероватноћу (1.143) и већу ентропију ($S = k_B \ln|\omega|$). Али, за разлику од информације, ентропија није логаритам вероватноће, већ је логаритам њеног дела. Промена $\omega \to \omega_1$ на скуп са још већим бројем исхода ($|\omega_1|$) неког другог распореда (у оквиру свих Ω), износи $\Delta|\omega_1| = |\omega_1| - |\omega|$, резултираће променом ентропије и вероватноће редом:

$$\Delta S = k_B \ln\frac{|\omega_1|}{|\omega|}, \quad \Delta P = \frac{\Delta|\omega_1|}{|\Omega|}. \tag{1.144}$$

Зато што је разлика логаритама једнака логаритму количника зато ни разлика ентропија није просто логаритам разлика вероватноћа.

Под ентропијом подразумевамо логаритам броја само оног дела распореда који чине једнолико распоређивање. У том делу, оптималних али не и свих распоређивања, логаритам броја распореда јесте врста информације. Зато се на ентропију односе наши претходни закључци о Хартлијевој информацији. На пример, ако је релативна информација мања онда је таква и релативна ентропија.

Са овим закључком би прича о ентропији била завршена, али није, јер ми још увек не знамо тачно шта је информација. Подсећам, Хартлијева дефиниција превише упрошћава ствар, Шенонова је непоуздана (в. пример 1.2.5) и недовољно општа, а генералисану информацију (1.103) смо тек открили држећи се принципа шкртости претходне две. Тај *принцип информације* према којој је природа штедљива са трошењем своје неизвесности, објашњава ентропију. Наиме, заузимајући једнолике распореде, другим речима тежећи већем нереду или слободи, молекуле чине гас аморфним, безличним, несклоним испољавању било каквих особина. Према томе, принцип информације је еквивалент *принципу ентропије*, спонтаном преласку система у стање веће ентропије. Оба су последице *принципа вероватноће*.

Подсећам да је званична физика у великом нескладу са сва три поменута принципа. Ако је (принцип вероватноће) највероватније да сам ја ту где сам, онда је за сваког другог који ту није вероватноћа релативна. За мене је њихова позиција релативна и мање вероватна такође. Већ то је у нескладу са савременим схватањем физичке вероватноће, али је у складу рецимо за законом инерције: ја сам у свом систему мировања или једноликог праволинијског кретања јер су ми сва друга стања мање вероватна. Друго, релативна информација је мања, јер би у противном васиона изгорела као шибица. Она би своју неодређеност за час потрошила утолико брже што има више физичких система, честица, којих има скоро бесконачно много. Али физика до овога још није дошла, нема неко мишљење, јер она још увек не види време као произведену информацију. Треће, принцип ентропије видимо као последицу принципа информације, на начин да је релативна ентропија такође мања, упркос физици која држи да је релативна ентропија једнака сопственој.

Резултате класичне термодинамике, као и резултате теорије релативности, овде не оспоравамо, али ћемо исправљати недоследности савремене релативистичке термодинамике. Како је то могуће? Па, пре свега зато што се релативистичка термодинамика може третирати на различите начине, а да се при томе класичне теорије, термодинамика

и *теорија релативности*, не морају мењати. Осврнућемо се на ово запажање, а затим ћемо уводити нове поставке и тестирати њихово слагање са класичним.

Током 20. века па до данас објављени су многи научни радови из области релативистичке термодинамике са којима се овде не слажемо. Поменућу само неке. Ајнштајн је 1907. године предложио да се ентропија сматра Лоренцовом инваријантом (да се не мења због кретања система), те да су топлота и температура система у кретању мање од сопствених (виђених у мировању). Исто је предложио и Планк[47] 1908. године. Затим је От 1963. године тражио сасвим супротно, да су топлота и температура у кретању веће од одговарајућих у мировању, а да је при томе ентропија такође стално иста. Ландсберг је негде у то време дошао до закључка да топлоту тела у кретању треба сматрати мањом, а температуру и ентропију непромењивим. Ван Кампен је откривао да су све три константне. На крају је Балеску доказао да је то свеједно, да се релативистичка термодинамика може третирати на различите начине тако да класична термодинамика и теорија релативности могу остати непромењене.

Због мноштва оваквих супростављених налаза, у физици се данас *температура* дефинише само за два тела у релативном мировању једно поред другог, па тамо где топлота одлази кажемо „тамо је хладније“. Затим правимо сложеније апарате за мерење температуре, корак по корак, почев од контактних топломера па до неконтактних термометара. Међу најсавременије такве уређаје спадају инфрацрвени термометри који температуру изводе из количине топлотне радијације (тзв. зрачења црног тела) емитованог из предмета мерења. Они се називају и ласерским термометрима, јер користе ласере за навођење. У следећој секцији ћемо видети како овакви термометри потврђују (хипо)тезе које овде износим.

Контактно мерење температуре тела у кретању је ретко могуће, а када је могуће није поуздано. На пример, у споријој ваздушној струји тела се хладе због јачег испаравања (дувајући хладимо супу), али при већим брзинама ваздуха она се ипак загревају, сматрамо због доминантнијег претварања кинетичке енергије која се трењем преноси на тело и прелази у топлоту. При још већим брзинама, ваздух се не може довољно брзо склањати испред предмета, компересује се, проузрокујући још јаче загревање тела. Метеор који великом брзином улеће у атмосферу толико се загрева да сагори.

Све то указује да температура предмета (топломера) у струји ваздуха није исто што и температура самог ваздуха. Ипак приметимо да се у аеронаутици узима да је приближна просечна разлика (сопствених) температура ваздуха и загрејаног предмета преко којег се ваздух креће пропорционална квадрату брзине ваздуха, што нас наводи на закључак да температура расте са *кинетичком енергијом*. Подсетимо се још једном шта је то кинетичка енергија.

Из специјалне теорије релативности знамо да за енергију тела у кретању важе релације:

$$E = \gamma E_0, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.145}$$

где E_0 енергија датог тела у мировању, а E енергија истог у кретању брзином v. Брзина светлости у вакууму $c \approx 3\cdot 10^8$ m/s не зависи од брзине кретања извора светлости. Развојем у степени ред релативистички коефицијент даје:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots, \quad \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots, \tag{1.146}$$

[47] Max Planck (1858-1947), немачки физичар.

где нису написани сабирци четвртог и вишег степена брзина, јер су занемарљиви за релативно мало v у односу на c. Када развијено γ вратимо у претходну формулу и ставимо за кинетичку енергију $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2 + \dots$, добијамо

$$E = E_0 + E_k, \tag{1.147}$$

јер је $m_0 = E_0/c^2$ маса датог тела у мировању.

Добијени израз, а и сам поступак нам говоре неколико ствари. Прво, температура T коју ће показати топломер у струји (идеалног) ваздуха брзине v може се апроксимирати изразом

$$T = \gamma T_0, \tag{1.148}$$

где је T_0 температура коју би показао топломер изван струје. Друго, релативна енергија (E) тела је збир сопствене (E_0) и кинетичке (E_k). То је укупна енергија тела у кретању и ту нема места за повећање топлотне енергије као осцилаторне енергије (молекула) или хемијске. Дакле, кретањем се повећава само транслаторна енергија, па је

$$Q = Q_0, \tag{1.149}$$

где су Q и Q_0 редом релативна и сопствена топлотна енергија. Та топлота Q, као *топлота ентропије*, за нас се још више разликује од рецимо енталпије, него што је то у савременој физици.

Са овим објашњењем, релативна ентропија (1.139) постаје

$$S = S_0/\gamma, \tag{1.150}$$

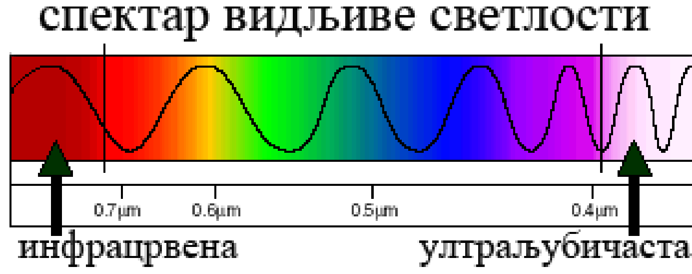
где је S_0 сопствена ентропија, а γ је релативистички коефицијент (1.145). То значи да се релативна ентропија смањује са повећањем релативне брзине тела, управо онако како време успорава и како се смањује информација.

Знамо да због принципа ентропије из собе са већим притиском ваздух спонтано прелази у собу са мањим и да нема таквог кретања ако су притисци ваздуха у собама једнаки. Доследно претходном, ако се затворена просторија креће брзином $\mathbf{v} = \text{const.}$ кроз ваздух истог притиска у мировању, занемаримо ли вискозност (силе унутрашњег трења), бочни притисак из собе на зид биће повећан пропорционално γ. Обрнуто, седимо ли у возилу које се креће једнолико праволинијски кроз ваздух исте густине, бочни притисак ка унутра биће опет већи пропорционално γ, због принципа релативности. О овом наизглед парадоксу расправићемо касније, а до тога погледајмо чиме још можемо оправдати нову идеју о већој релативној температури.

1.3.3 Црвени помак

Закључак (1.148) подржава технологија инфрацрвених термометара. Светлост је део спектра електромагнетног зрачења (слика 1.22), од највећих таласних дужина (инфрацрвено, 700 nm) до најкраћих (ултраљубичасто, 400 nm). Знамо да сав спектар извора Е-М таласа у кретању има веће таласне дужине због Доплеровог ефекта. Каже се таласне дужине извора у кретању праве *помак ка црвеном*, који ћемо овде назвати „помак ка топлијем“, просто зато што се свугде у физици израз „Доплеров ефекат“ (или Доплеров помак) може заменити са „већа температура“, без контрадикције.

Доплеров ефекат је рецимо виши тон звука сирене која нам се приближава или нижи када се удаљава. Обрнуто фреквенцији ν се мења таласна дужина λ, јер је



Slika 1.22: Део електромагнетних таласа.

њихов производ једнак константној (брзина звука c_z у води је око 1500, у ваздуху 340, а у вакууму 0 метара у секунди) брзини таласа извора у мировању $c_z = \lambda\nu$. То је својство свих таласа која нам у случају светлости постаје нарочито занимљиво.

Знамо да извор таласа сопствене (опажена са извора у мировању) таласне дужине λ_0 и фреквенције ν_0, који се креће брзином $\pm v$ по правцу на којем се налази посматрач, има таласну дужину и фреквенцију у односу на посматрача, редом:

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}, \quad \nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}, \tag{1.151}$$

при чему предзнак минус узимамо када се извор приближава, а плус када се удаљава. Константа $c = 3\cdot 10^8$ m/s је брзина светлости у вакууму. Означимо ли са λ_- и λ_+ таласне дужине редом долазећег и одлазећег таласа, видимо да важе неједнакости:

$$\lambda_- < \lambda_0 < \lambda_+, \tag{1.152}$$

када је брзина $v > 0$. Средња вредност (аритметичка средина) ове уздужне (лонгитудиналне) опажене таласне дужине је:

$$\lambda_l = \frac{1}{2}(\lambda_- + \lambda_+) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.153}$$

Када посматрач није на правцу кретања извора таласа и гледа окомито на тај правац ка извору, опажаће попречну (трансферзалну) таласну дужину

$$\lambda_t = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.154}$$

Дакле, опажена средња лонгитудинална и трансферзална таласна дужина су једнаке. Обе су веће од сопствене. Међусобно су различите долазећа опажена λ_+, сопствена λ_0 и одлазећа опажена λ_-.

Релативистички Доплеров ефекат је добро познат физици, али не и интерпретација коју промовишем, да он једноставно значи промену релативне вероватноће средине и температуре таласа чији извор се креће у односу на запажање сопственог посматрача (који мирује у односу на извор). Наиме, релативистички Доплеров ефекат указује на исте промене самог простора, система координата везаних за извор ЕМ таласа.

Положај честице-таласа размазан је дуж њене таласне дужине тако да већа таласна дужина значи мање тачну позицију честице, односно мању густину вероватноће њеног

налажења на датом месту, а обрнуто, краћа таласна дужина даје прецизније место налажења честице. Из претходних једначина даље следи да позиције таласа извора у кретању имају мање вероватноће од истих позиција извора у мировању.

Знамо да се обични Доплеров ефекат изводи из обичних (Галилејевих) трансформација, а да се овде наведени релативистички Доплеров ефекат изводи из Лоренцових трансформација специјалне релативности. Међутим, аритметичка средина релативних долазећих и одлазећих лонгитудиналних таласних дужина (1.151), а посебно релативна трансферзална таласна дужина (1.154), могу се разумети и помоћу успоравања времена у односу на посматрача, које ћемо још једном објаснити.

Пример 1.3.1 (Дилатација времена). *Показати да за релативно Δt и сопствено Δt_0 протекло време важи једнакост*

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0, \tag{1.155}$$

где је $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, а v релативна брзина између два инерцијална система.

Решење. Из специјалне теорије релативности знамо да су кретања релативна и да је брзина светлости у вакууму независна од брзине извора. Отуда, за два догађаја са координатама (r_1, t_1) и (r_2, t_2) дуж неког правца кретања у два тренутка, ако ставимо $\Delta r = r_2 - r_1$ и $\Delta t = t_2 - t_1$, израз за квадрат интервала

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 \tag{1.156}$$

биће исти у оба инерцијална система. Када се таква два система координата K и K' крећу дуж датог правца константном брзином $\pm v$ један у односу на други, важи:

$$\Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 = (\Delta r')^2 - c^2 (\Delta t')^2.$$

Сопствено време посматрача из K' означимо са $\Delta t' = \Delta t_0$. Тада је $\Delta r' = 0$ (он мирује у свом систему), па добијамо:

$$\Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 = -c^2 \Delta t_0^2,$$

$$\left[\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2 - c^2\right] \Delta t^2 = -c^2 \Delta t_0^2,$$

$$(v^2 - c^2) \Delta t^2 = -c^2 \Delta t_0^2,$$

а отуда (1.155). Дакле, сопствено време гледано из другог система тече спорије. □

Са успоравањем времена сразмерно успоравају опажене фреквенције, а због $\lambda\nu = c$ повећавају се таласне дужине. Резултат је једнак претходним. Остаје само питање различитих долазећих и одлазећих таласа (1.152).

Због споријег протицања времена система у кретању, честица која нам долази налази се у нашој будућности и све је ближе нашој садашњости, док се њена удаљеност до нас смањује, да би након мимоилажења одлазећи од нас била све даље у нашој прошлости. То смо помињали и уз објашњење парадокса близанаца тумачећи силу. Сада идемо корак даље са истим запажањем.

Ми смо такође у будућности честице која нам долази, а у прошлости оне која одлази. На тај начин таласи који нам долазе дефинишу нашу будућност, а одлазећи прошлост. Са једне стране то значи објективност (реалност) наше историје и потврду закона одржања информације. Наша прошлост је објективна колико је објективно опажање честице коју ми опажамо. Са друге стране, из неједнакости (1.152) следи да

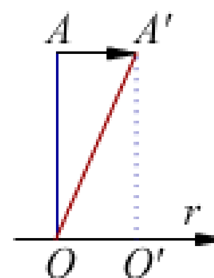
нам је будућност вероватнија од садашњости, а да је прошлост мање вероватна од обе. Зато опажамо да нам време тече од наше прошлости преко садашњости ка будућности. Склад ових објашњења сматрам потврдом основне идеје о природи времена, али и нове хипотезе (1.148) о већој релативној температури.

Сви посматрачи у инерцијалним кретањима станују у истом простор-времену, али га не виде сви исто. Али брзина светлости у вакууму ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s) им је свима једнака и то нам даје за право да управо таласе светлости (EM зрачења) узимамо за дефиницију простор-времена. Зато је интервал (1.156) толико важан, јер је за сваког посматрача у случају светлости $\Delta s = 0$, на основу којег израчунавамо и остатак пута ($\Delta s \ne 0$) неке спорије честице допуњујући га кретањем светлости. Све остало изводимо из те ставке да је Δs^2 инваријанта, коју третирамо као Питагорину теорему.

Тако смо дошли до закључка (1.155) да је релативно време спорије од сопственог. Помоћу слике 1.23 ћемо разумети утицај успоравања времена на релативно скраћивање (контракцију) дужина дуж правца кретања r, иначе изведену из Лоренцових трансформација у примеру 1.1.3.

У односу на сопственог посматрача у координатном систему K', окомито на његов правац кретања послата је зрака светлости OA коју он после неког времена види опет окомиту као $O'A'$. Релативни посматрач из K кретање те светлости види по хипотенузи OA' правоуглог троугла $\Delta OAA'$. Сопствени посматрач види краћи пут светлости (катета OA) али му време спорије пролази, па види брзину светлости истом.

Да би брзине светлости за њих биле тачно једнаке, мора бити дужина хипотенузе $\overline{OA}'$ за сопственог посматрача једнака дужини катете $\overline{OA}$ за релативног. Другим речима, морају дужине по правцу кретања сопственог посматрача бити тачно онолико пута краће за релативног, колико пута му време протиче спорије. Отуда формула за *контракцију дужина*



Slika 1.23: Кретање.

$$\Delta r = \Delta r_0 \gamma^{-1}, \quad \gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{1.157}$$

где је Δr_0 сопствена дужина по правцу кретања а Δr одговарајућа релативна. Дужине окомите на правац кретања остају једнаке за оба посматрача.

Помоћу успоравања времена можемо разумети и повећање масе и енергије тела, приметимо ли прво да спорије време значи већу инертност тела, што значи повећање његове релативне масе. То повећање масе праћено је повећањем брзине, а то због закона одржања енергије значи повећање енергије тела. То је кратко објашњење познатих формула:

$$m = \gamma m_0, \quad E = mc^2, \tag{1.158}$$

где је m_0 сопствена а m релативна маса укупне енергије E.

У међувремену приметимо да Доплеров ефекат и ове формуле имплицирају да можемо сматрати да постоји само један фотон, односно једна врста електромагнетних зрачења са мноштвима релативних посматрања. Постоје многи системи у разним релативним кретањима за сваког посматрача унутар васионе. Из константности производа таласне дужине и фреквенције фотона, $\lambda\nu = c$, следи да опажања најфреквентнијих иду са најкраћим таласним дужинама, а то значи са опажањем простора са највећим вероватноћама. То су системи са највећим енергијама и највећим релативним

брзинама. У граничном случају, места без неизвесности постају она са апсолутно тачним положајима и бескрајним енергијама. Уопште, границе (почетак или рубови) васионе, хоризонт догађаја, брзина светлости као и екстремно мале дужине, места су за која нам требају бесконачно велике енергије, а то су места нулте ентропије.

Дакле, из теорије релативности знамо да су релативне масе молекула тела у кретању веће и то тачно онолико пута колико им време тече спорије. Даље процењујемо да осцилаторна релативна енергија молекула може остати једнака сопственој, јер колико се може добити повећањем маса, тачно толико се може изгубити успоравањем фреквенција, што је у складу са закључком (1.147), да у релативном повећању енергије нема места за било коју другу енергију осим кинетичке. Међутим, закључак да у повећању кинетичке енергије кретањем тела нема промене његове топлотне енергије, да важи једнакост (1.149), рекли смо, директно је супротан савременој физици.

Резимирајмо сада, са нових позиција, шта се догађа када тело у кретању удари у препреку и заустави се загрејано. Тело у инерцијалном кретању брзином $v > 0$ у односу на датог референтног посматрача има већу укупну енергију $E = \gamma E_0$ и већу температуру $T = \gamma T_0$, непромењену топлоту $Q = Q_0$, али смањену ентропију $S = S_0/\gamma$. У тренутку удара у препреку и заустављања, релативна брзина тела постаје $v = 0$, кинетичка енергија постаје топлотна, а температура остаје непромењена – али сада у односу на (истог) посматрача који релативно мирује. Температура коју тело има у мировању непосредно након судара је она релативна температура коју је тело имало док се кретало.

Све ово смо објашњавали узимајући само примере из специјалне релативности, али слично важи и у општој. У присуству гравитације време успорава, због чега се дешава гравитациони *црвени помак* који је у смислу претходног објашњења еквивалент Доплеровог помака. Овде можемо додати да то значи повећање температуре положаја (тачака које мирују у односу на извор гравитације) у гравитационом пољу. Када брзину из коефицијента γ заменимо гравитационим потенцијалима, претходни резиме остаје. Потенцијална енергија тела у гравитационом пољу се мења (кретањем и кинетичка), али не и топлотна. У статичним тачкама јачег поља ентропија је мања.

Због принципа ентропије (као и вероватноће), тело задржава своје инерцијално кретање јер му сва друга релативна кретања имају мању ентропију. У присуству гравитационог поља оно се креће геодезицима, кажемо слободно пада, јер су то путање константне (како вероватноће тако и) ентропије. Изван своје путање, сваку другу геодезијску линију (слободног) падања дато тело види у стањима ниже ентропије, те му није могућ спонтани прелазак на такву. Зато сателити круже око Земље не мењајући путање, све до судара са другим телом (честицама атмосфере) или дејства неке друге силе. Специјални случај овога је тело које мирује у пољу неке планете и које спонтано може сићи на нижу висину само са повећањем брзине, јер би на мањој висини у стању мировања имало мању ентропију.

Да гравитациона сила привлачи тело у простор мање ентропије изгледа апсурдно. Па ипак, то је логично, јер нема доласка у стања ниже ентропије без дејства неке силе, а опет, поремећаји ентропије, вероватноће, једнако као и закривљеност простора, стварни су дубљи узроци гравитационих појава.

1.3.4 Притисак

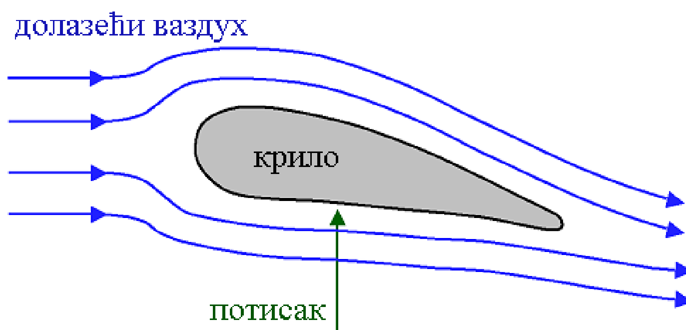
У претходне две секције је уведена и образложена хипотеза да је релативна топлотна енергија једнака сопственој (1.149). То је у нескладу са савременом релативистичком

термодинамиком где се узима да је топлотна енергија пропорционална или тачно једнака укупној енергији тела, те је већа када се тело креће. Занимљиво, посебно зато што су идеје које овде износим сасвим у складу и са класичном термодинамиком и са теоријом релативности. Отуда потреба за још једним пажљивим разматрањем параметара који доводе до неслагања. Међу њима је најважнији притисак.

У класичном смислу притисак ствара бубање молекула по некој површини, од којег нам затим долазе физички ефекти. Било да оне одскакују од ударене површине или се лепе за њу, притисак производи кинетичка енергија молекула у слободном кретању, па нас неће изненадити да притисак зависи од густине ρ гаса или течности која генерише притисак, затим од квадрата брзине молекула, v^2, па према томе и од релативистичког коефицијента γ из претходних једначина. Како брзине молекула могу имати различите смерове и интензитете, то и притисак исте средине може бити различит у различитим смеровима, те је он пре *тензор* него *скалар*. На пример, знамо да за бочни (трансферзални) притисак P_t, окомит на правац тока (флукс) гаса или течности брзине v и густине ρ важи Бернулијева[48] једначина

$$P_t + \frac{1}{2}v^2\rho + g\rho z = \text{const}, \tag{1.159}$$

где је g гравитационо убрзање, а z висина на коју се флукс пење. Повећањем (смањењем) квадрата брзине овај притисак се смањује (повећава), што значи да P_t није инваријанта кретања. Већ тиме је непоуздан исказ да је притисак Лоренцова инваријанта, који је иначе уобичајен у савременој релативистичкој термодинамици.



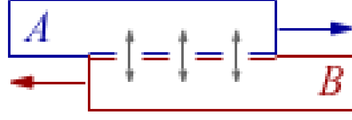
Slika 1.24: Ваздух струји око крила авиона.

На слици 1.24 видимо примену Бернулијеве једначине на лет авиона. Авион се креће великом брзином да би ефекат квадрата брзине v^2 у формули (1.157) био што већи. Крило авиона је глатко и аеродинамично тако да ваздух лако клизи око њега, али је оно таквог облика да је путања ваздуха са горње стране дужа па је са те стране већа брзина ваздушне струје. Она ствара већи узгон (повлачење горе) на струју ваздуха од притиска на доњу стране крила. Зато је потисак одоздо ка горе већи, а тај је у случају хоризонталног лета авиона тачно у равнотежи са тежином авиона. При тачнијем опису треба додати и ковитлање ваздуха око крила које помаже узгону.

Бернулијева једначина мора функционисати и у случају мимоилажења две собе A и B, које се одозго виде на следећој слици 1.25. Између соба су отвори за слободан пролазак ваздуха. Ако се у односу на вањског посматрача обе собе крећу истим брзинама, соба A десно а соба B лево, због симетрије нема кретања ваздуха између.

[48]Daniel Bernoulli (1700-1782), швајцарски математичар и физичар.

Међутим, шта ће видети посматрач који седи у соби A и који према специјалној теорији релативности може сматрати да се само соба B креће? Или обрнуто, шта ће рећи посматрач који мирује у соби B и једнако је у праву када сматра да се креће само она друга соба?



Slika 1.25: Собе A и B у узајамном кретању.

Наравно да и вањски посматрач који сматра да се обе собе крећу мора бити у праву, па зато закључујемо да нема кретања ваздуха између соба. Међутим, Бернулијев бочни потисак би за посматрача из A морао проузроковати одлазак ваздуха из његове собе ка соби B, осим ако се у соби B управо због тог становишта не појави релативни надпритисак ваздуха у самој соби B. Тај надпритисак би морао бити тачно толики да би могао спречити кретање ваздуха између A и B.

Приђимо овом проблему са друге стране. На истој слици 1.25 узимамо и даље да је сопствени посматрач у покретној соби B и да он у својој соби опажа притисак P_0 (у свим правцима), а ту собу гледа A који себе сматра непокретним. Притисак P је дејство вектора силе $\mathbf{F}$ на површину Π, то је количник силе окомите на површину и јединице те површине.

Међутим, релативна „паралелна површина“ правцу кретања смањује се пропорционално γ^{-1}, док се „окомита површина“ на правац кретања не мења. Ако за „сопствену“ силу узмемо производ масе и убрзања ($\mathbf{F}_0 = m\mathbf{a}$), а промену импулса у јединици времена ($\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$) за „релативну“, као у једнакостима (1.39), имаћемо „релативну“ паралелну и окомиту компоненту:

$$\mathbf{F}_{\|} = \gamma^2 m\mathbf{a}_{\|}, \quad \mathbf{F}_{\perp} = m\mathbf{a}_{\perp}, \tag{1.160}$$

па су одговарајуће компоненте притиска:

$$P_{\|} = \gamma^2 P_0, \quad P_{\perp} = \gamma P_0. \tag{1.161}$$

Тако видимо да се у соби B јавља релативни надпритисак који би могао зауставити усисавајуће ефекте Бернулијеве једначине. Бернулијев (трансферзални) усисавајући притисак P_t требао би, уместо (1.159), бити тачно усклађен са

$$P_t = P_0\gamma^{-1}, \quad \gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{1.162}$$

да би се поништило дејство релативног бочног надпритиска $P_{\perp}$ из (1.159).

Одступања која настају због вискозности (због контракције покретне собе по дужини и вишег паралелног притиска при преносу на окомити) морају бити у равнотежи са (1.159). Тада нема парадокса соба на слици 1.25. Тај бочни надпритисак омогућава затворени простор собе као и друга (паралелна) компонента још већег релативног надпритиска. Због паралелног притиска ваздух у соби тежи да се издужи, што би се и десило да нема предњег и задњег зида собе. У наизглед сличној ситуацији, када меримо температуру гаса у кретању стављајући топломер директно у струју, евентуално затварање собе нема толиког значаја.

Због релативне контракције дужина само по правцу брзине **v**, запремина собе у кретању износи

$$V = V_0\gamma^{-1}, \tag{1.163}$$

где је V_0 њена сопствена запремина. Релативна запремина собе се смањује док притисак расте. Са новим формулама (1.159) ће нам требати и ново тумачење Бојл-Мариотовог закона (в. [12]). Овде је и даље уреду за сопствени систем речи: производ притиска и запремине гаса је константан, али није за релативни. Производ релативне запремине и притиска ваздуха има две „компоненте“, паралелну и окомиту на вектор **v**, редом:

$$VP_{||} = \gamma V_0 P_0, \quad VP_{\perp} = V_0 P_0, \tag{1.164}$$

где су V_0 и P_0 запремина и притисак ваздуха у соби у мировању. Када мало пажљивије погледамо, ово ново тумачење притиска ће се показати боље усклађено са тензорским карактером енергије (1.136) од уобичајеног, али о томе неки други пут.

Овде се такође нећемо превише бринути због евентуалних неслагања са једначинама идеалног гаса, за које у реалнијим условима треба потражити боље изразе. Савршен или *идеалан гас* је теоријски гас који се састоји од тачкастих честица у насумичном кретању чије су једине интеракције савршени еластични судари. Један *мол* идеалног гаса има запремину 22,71 литара у нормалним условима, на температури 273,15 Келвина (нула Целзиуса) и под апсолутним притиском од 10^5 Паскала (око једне атмосфере). У нормалним условима се многи гасови (азот, кисеоник, водоник, племенити гасови) понашају попут идеалног. Остали гасови су сличнији идеалном на вишим температурама и нижем притиску, када потенцијална енергија међу молекулама постаје мање битна у односу на кинетичку енергију и када је удаљеност између молекула већа.

Треба знати да модел идеалног гаса не успева на нижим температурама или вишим притисцима када међумолекуларне силе и размаци постају важни. Такође, тај модел није примењив на многе тешке гасове. На нижим температурама је притисак реалног гаса често значајно мањи него код идеалног гаса. На пример, модел идеалног гаса уопште не предвиђа прелазак из гасовитог у течно агрегатно стање, уобичајен за реалне гасове са смањивањем температуре. Из истог разлога и релативни идеални гас повећањем брзине постаје све мање идеалан.

У идеалном гасу везу између притиска, запремине, температуре и количине гаса изражава једначина идеалних гасова

$$PV = nR_uT, \tag{1.165}$$

где је P апсолутни притисак (у Њутнима по метру квадратном), V запремина посуде (у метрима кубним), n је број присутних молова гаса, $R_u \approx 8,31\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$ је универзална гасна константа, а T температура (у степенима Келвина). Ова формула је најјачи аргумент да се температура гаса у кретању не мења. Међутим, значајним порастом релативне брзине, гас губи својства идеалног (стиска се по дужини, расте маса молекула), па се у формулу идеалних гасова баш тада не можемо поуздати.

Ако икада прихватимо овде изведено третирање ентропије и последица, много тога из релативистичке термодинамике биће логичније или једноставније. Болцманова константа $k_B = R/N_A$ и даље дефинише количник гасне константе R_u и Авогадрове[49] константе $N_A = 6,02\times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$. То и даље остаје у складу са познатом класичном формулом термодинамике, $PV = nRT = k_BNT$, где је n број молова супстанце, а N

[49] Амадео Авогадро (1776-1856), италијански научник.

број молекула гаса. За $n = 1$ mol, број N је једнак броју честица у једном молу, тј. Авогадровом броју. Са друге стране, кинетичка теорија даје просечан притисак идеалног гаса $P = Nm\bar{v^2}/3V$, одакле је просечна транслаторна кинетичка енергија $\frac{1}{2}m\bar{v^2} = \frac{3}{2}k_BT$, а она има три степена слободе (по један $\frac{1}{2}k_BT$ за сваку димензију).

Познато је у физици, *енталпија* (H) је збир унутрашње енергије (E) и производа притиска (P) са запремином (V) термодинамичког система. Енталпија је својство термодинамичког система, независно од његове историје:

$$H = E + PV, \tag{1.166}$$

где су E унутрашња енергија система, P притисак, а V запремина. Ако се енергија мења према обрасцу (1.145), а за производ притиска и запремине узмемо паралелну компоненту из (1.164), онда је релативна енталпија

$$H = \gamma H_0, \tag{1.167}$$

где је H_0 сопствена. Тада је релативна енталпија већа од сопствене, пропорционално са γ, што је већ разликује од топлоте (1.149). Међутим, због овде промовисане векторске природе притиска те (1.164), а посебно због познате тензорске природе енергије (1.136), ствари се још више компликују, заправо усклађују, о чему ћемо касније више.

Приметимо још само да разлике релативних компоненти притиска (1.161) дају ново значење реализацијама случајности. Исти сопствени притисак, рецимо гаса у мировању, ствараће различите релативне реализације случајних догађаја и према томе различите реалности посматрачима који се у односу на њега крећу у различитим инерцијалним системима. То је у складу са новим старим принципом вероватноће, али не и са детерминизмом механике.

1.3.5 Релативне реалности

Без присуства сила природи не би требала објективна случајност, нити би нама требале вероватноће. То смо закључили разматрајући број димензија васионе. Међутим, не треба ићи тако далеко да би приметили да без физичких сила не би биле могуће различите брзине кретања и да без сила уопште не би било релативних посматрача. Искључити силе значи искључити случајности, а то значи искључити васиону. Према томе, принцип вероватноће је много општији него што то изгледа на први поглед.

Отуда наизглед претеран став да је произвољно тело тамо где се у датом тренутку налази зато што је то стање њему тада највероватније. Реализујући највероватније, природа као да жели сачувати своје неизвесности дозвољавајући само најизвеснијим случајностима да постану информације. Дакле, последица принципа вероватноће је принцип информације: трошење највероватнијих штеди неизвесност. То нас наводи и на закључак да важи закон одржања количине неизвесности која није реализована у информацију.

Замислимо човека који седи на клупи у парку и посматра оближње стабло. Он је у сопственом физичком систему у којем се због објективне случајности врши стално претварање дела неизвесности у информацију. Мноштво новонасталих информација чини његову садашњост. Објективност случајности тера природу да се мало по мало одриче своје неизвесности стварајући слој по слој садашњости, стално изнова стварајући материју, простор и време. Клупа је скоро увек иста, а дрво се помало њише због дејства ваздушних сила, а све заједно доказује да природа увек ствара исто у истим

датим околностима, због истих датих вероватноћа. Прошлост поменутог човека настаје нагомилавањем слоја по слоја његових садашњости. Тако настаје време.

Због своје сложености и због закона великих бројева, макротела нам привидно изгледају као да могу без закона вероватноће, а зато што живимо у макросвету и због упоредог присуства строгих апстрактних закона математике, скоро да поверујемо у детерминистичку природу света. А чак и највећа тела морају бити у датом стању на датом месту управо зато што је са њиховог сопственог становишта свако друго стање или други положај мање вероватан. Када опажање вероватноће не би било релативно, сви посматрачи били би на истом месту! Били би у просторном конфликту.

Из закључка да време не постоји без настајања информације, независно од претходног, следи исти закон одржања количине неизвесности. Видели смо да су и класичне дефиниције информације такође у сагласности са овим законом. Штавише, из тих дефиниција произилази да је количина настале информације тачно једнака количини потрошене неизвесности. Сва потрошена неизвесност чини материјални свет датог посматрача, његове (сопствене) васионе: време, простор и супстанца.

Да не важи принцип вероватноће, рецимо да се једнако реализују и мање вероватни догађаји, посматрач са клупе би након дрвета у следећем тренутку могао опажати и нешто битно друго, па треће. Принцип реализације највероватнијих догађаја гаранција је максималне (могуће) стабилности, континуитета природе временом. Промена вероватноће могућа је силом, али је и тај процес постепен. Сила маси даје убрзање, мењајући јој брзину. Релативни посматрач тих промена ће на сваком нивоу брзина опажати другачијим одговарајуће исте информације система у којем дата маса мирује, све мање са већом брзином. Сила удаљава дато тело из система посматрача, још више умањујући износ губитака неизвесности сопствене васионе, као да га односи на другу страну брда смањујући штету за становиште посматрача. У том смислу је сила још већа подршка принципу вероватноће.

Неизвесност пре реализације случајног догађаја постаје информација након. Укупна количина „неизвесност плус информација“ појединог затвореног система било којег случајног догађаја, константна је, не мења се током производње дате информације. Она је константа система, па је и константа васионе. Међутим, произведена информација нити количином није једнака за сваког, сопственог или релативног посматрача, јер би у противном васиона веома брзо потрошила своју неизвесност. Много је више релативних посматрача него сопствених, али релативни опажају мању производњу информације од сопственог код сваке случајне реализације, па (сопствена) васиона траје.



Slika 1.26: Сопствено и три релативна опажања из A_1.

На слици 1.26 видимо једног сопственог посматрача A_1 који је релативни за системе A_2, A_3 и A_4. Та четири различита система представљају $n = 4$ сопствена посматрача од којих је сваки још по $n - 1 = 3$ пута релативан, тако да имамо укупно

$$V_2^n = n(n-1) = 4 \cdot 3 = 12 \tag{1.168}$$

релативних. Број варијација V_2^n расте са квадратом броја n. У случају једнаке произвођње информације код свих, велики бројеви релативних система би смањивали трајање васионе у односу на сваког појединог посматрача. Време које је заправо произведена информација брзо би се трошило. Могло би се десити да васиона изгори у једном трептају, као у следећем примеру.

Пример 1.3.2 (Вакуум)**.** *Стварање и поништавање честице и античестице.*

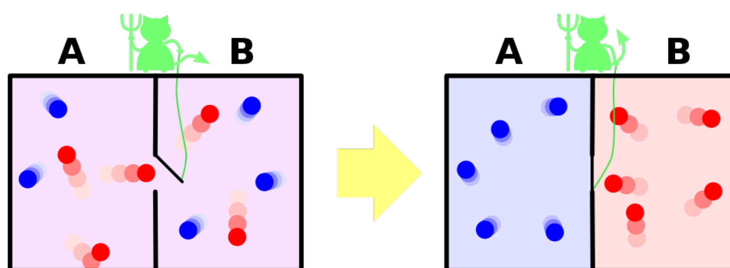
Објашњење. Према Хајзенберговој неодређености за енергију и време, $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, у вакууму увек може настати пар честица, материје и антиматерије, произвољно велике енергије, до ΔE, само ако њихово трајање није дуже од Δt. Сви догађаји такве честице су сопствени за једног посматрача из вакуума, па ако већа енергија такве честице значи и већи број догађаја, онда она значи и краће трајање. Када би таквим стварањем (креацијом) настала читава васиона, она би због своје огромне енергије, тачније речено због огромног броја система које садржи, морала нестати (анхилирати се) у екстремно кратком итервалу времена. Ако су узајамно релативни према овде изложеном концепту, за житеље такве васионе наш трептај био би њихова вечност. □

Креација са анхилацијом пара честица-античестица у примеру вакуума у складу је са претходним разматрањима по још неким детаљима. Све „галаксије“ и сва друга „тела“ настала као честице нове „васионе“ су за посматрача из нашег вакуума једнака једном сопственом систему, па је трајање (Δt), дакле трошење, такве „васионе“ таквом (вањском) посматрачу обрнуто пропорционално са укупним садржајем (ΔE). Резултат какав даје и Хајзенбергов принцип неодређености. Даље, та би „васиона“ била или од материје или од антиматерије, а не би морала имати нити друге симетрије. Рецимо, не би морала бити укупно електрично неутрална. При томе не претпостављамо било шта о (унутрашњем) опажању тамошњих „житеља“.

Из наведеног примера видимо колико су за васиону важни релативни посматрачи за које је успорен ток времена у односу на сопствено. Они опажају спорију производњу информације и на тај начин учествују у смањењу трошења неизвесности и смањењу трошења саме васионе. Већ смо видели да је шкртост смисао принципа информације, а како је ентропија делом информација, исто важи и за њу. Зашто су и принцип ентропије (физички систем спонтано тежи повећању ентропије) и принцип информације (штедња са информацијом) последице истог принципа вероватноће (реализације највероватнијег) можемо разумети и на следеће начине.

Спонтаним растом ентропије уређеност постаје неуређеност, тежи се безличном, аморфном стању које мало шта казује. Циљ раста ентропије је „неодавање информације“. То смо већ помињали, а сада погледајмо да то исто доказује и *Максвелов демон* (в. [13]), на слици 1.27. Преградом је соба подељена на два одељка A и B, у којима је у почетку уједначен притисак ваздуха, једнак је број брзих (црвене) и спорих (плаве) молекула. Замишљамо да постоји демон који контролише информације, тако да пропушта само брзе молекуле из A у B, а само споре из B у A, када молекуле наиђу на преграду. Временом ће се све брзе молекуле наћи у одељку B, а све споре у одељку A. Међутим, тако смо из стања веће ентропије (неуређености) дошли у стање мање ентропије (уређености). Добили смо парадокс који аутор па и генерације физичара после њега нису умеле да објасне.

Сада када промовишемо простор, време и материју као облике информације, пример са Максвеловим демоном постаје јаснији. Дајући демону способност уређивања нереда, независно од тога да ли та потрошња изискује потрошњу енергије, демону бисмо дали



Slika 1.27: Максвелов демон.

способност трошења информације. Међутим, природа то неће дозволити управо због своје шкртости (принципа информације). Она не одаје информацију осим када то баш мора. Према томе, принцип ентропије је последица принципа информације, а оба су последице принципа вероватноће.



Slika 1.28: Шредингерова мачка.

Вратимо се сада на необична својства времена, објашњавајући их помоћу примера *Шредингерове мачке* (в. [14]), на слици 1.28. Када би мачка била мали квантни систем за који нису битни закони великих бројева, онда би свака информација о њој значајно мењала њено материјално стање. Рецимо да у кутији имамо мачку за коју не знамо тачно да ли је жива или мртва, а затим да отворимо кутију и добијемо такву информацију. За мали квантни систем, свака па и таква информација је огромна ствар. Она не-супстанцијално стање неизвесности мачке претвара у супстанцијално. Одузимајући неизвесност претходном стању мачке, због закона одржања количине (неизвесност плус информација), стања мачке постају извеснија, па иако је у тренутку отварања кутије било свеједно хоћемо ли затећи живу или мртву мачку унутра, након отварања то више није. Установивши да је мачка „жива“, дефинисано је и њено претходно стање са „жива“. Да је отварањем кутије установљено да је мачка „мртва“ и њено

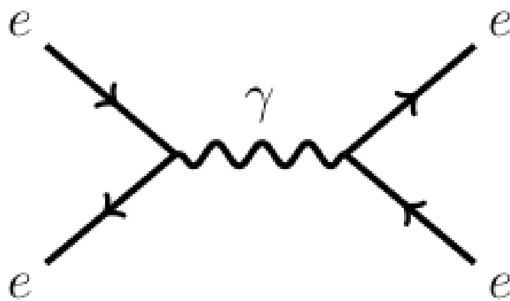
претходно стање постало би „мртва“. У тренутку отварања то је било објективно свеједно, јер све до отварања кутије мачка објективно није била нити „жива“ нити „мртва“.

Ми смо тек након открића квантне спрегнутости у стању да разумемо ту дубљу природу релативности времена коју пренаглашава Шредингерова мачка. Исто је у основи Хајзенбергове чувене реченице о мерењу: „Тек након мерења, путања честице добија реалан смисао“. Дакле, не само да мерењем сазнајемо нешто о честици, већ честица чином мерења у садашњости дефинише и своју објективну прошлост. Дајући информацију о себи она се открива материјалном свету, слаби своју неодређеност, а тиме дефинише и своју материјалну прошлост. Исто имамо и у овде спомињаној креацији реалности слободне честице помоћу две узастопне интеракције.

Са овде изложеном теоријом „материјалне информације”, поменуто Хајзенбергово објашњење мерења добија дубље значење. Реализацијом случајног догађаја, претвара се део неизвесности у информацију због чега квантни систем постаје извеснији. На тај начин постаје извеснији и сваки макро-систем, али због малог удела појединих информација у новој реалности она остаје наизглед непромењена.

Слободна честица након интеракције A путује као врло неодређена ка неизвесној интеракцији B. Ту неодређеност јој омогућава Хајзенбергов принцип неодређености у претходним одређенијим, сада можемо рећи реалнијим, интеракцијама. У границама тих неодређености су испоштовани закони одржања енергије, импулса, спина, а из истог разлога су могуће и варијације њене будућности. Зато је додефинисање интеракције A могуће и након интеракције B. То изгледа чудно ако мислимо да је временски ток нека прецизна дедукција, што он није. Прошлост је наталожена садашњост која се због обоје, конзервације информације и објективне случајности, делом чува а делом мења. Тако долазимо до закључка да је *реално* само оно што је *комуницирало* са нечим са чиме смо ми комуницирали.

Принцип информације је и штедљивост у трошењу неизвесности, али и ускраћивање комуникације. Ограничавање могућности размене материје, интеракција и информације значи да нема комуникације свачега са свачим. Фотон комуницира са електроном, електрон путем фотона са истим или другим наелектрисањем, али увек на начин описан шаблоном одавања информације и губитка неизвесности. Проверимо то на моделима Фејнманових дијаграма.



Slika 1.29: Фејнманов дијаграм.

На слици 1.29 лево се налази први електрон e^- који емитује виртуелни фотон γ који наилази на други електрон e^- десно. Прихватамо Фејнманов опис да око сваке наелектрисане честице постоји стално поље виртуелних фотона и да је на слици такав

један који одузима импулс (масу, енергију, спин) првом електрону и предаје га другом. Закони одржања су испоштовани и електрони се одбијају. Тако настаје одбијање истоимених наелектрисања. Када десном електрону обрнемо смер тока времена, лево је и даље исти први електрон али је десно позитрон e^+, па иста размена импулса постаје разлог за узајамно привлачење сада супротних наелектрисања.

Даље само појашњавамо Фејнманов опис, прво помоћу информације. Пре или касније, неки виртуелни фотон γ комуницира (размени информацију) између две наелектрисане честице, као на датој слици. Тиме се повећа извесност простора између њих и честице скрећу у неизвесност. За две истоимене честице (електрон-електрон) неизвесност је вани, а за различите (електрон-позитрон) је унутра.

Помињали смо „два пролазника“ (сада електрон и позитрон) којима би временски ток ишао супротним смеровима и зато не би могли комуницирати на уобичајен (рецимо типичан) начин. Када први постави питање он у свом времену касније очекује одговор, који други у свом времену мора дати прво па тек онда чути питање. Због одсуства типичне размене информације оба долазе до закључка да је у простору између њих већа неизвесност и привлаче се. Приметимо да је ово објашњење одбијања (за нијансу) различито од Фејнмановог. У њему доминира „жеља“ за што већом неизвесношћу, дакле принцип информације.

Иста прича има још импликација које допуњавају ширу слику. На пример, како је могуће да реалним сматрамо ентитете који не комуницирају? Одговор је у нетипичним комуникацијама. Чак и у макро-свету срећемо људе који су толико паметни или се толико добро познају да ће један давати (тачан) одговор на питање које други још није ни стигао поставити. Исто ћемо добити и када су саговорници веома глупи али у одговарајућим једноставним ситуацијама.

Такве су елементарне честице. Када су сасвим „глупе“, најмање честице не могу било шта смишљати, организовати или планирати, већ морају реаговати „на прву лопту“. Њима тада уопште није битно куда ће време опонента да би могле „комуницирати“. Трећи пример је комуникација иза брда. У случају све већих релативних брзина, емисије информације изгледају све мање и читава њихова реалност као да одлази на неку недоступну страну. У сваком од тих случајева имамо интеракцију са нечим што има интеракцију са датим и налазимо се на истој страни реалности.

Савремена космологија држи да је васиона настала великим праском (big bang) и да се од тада до данас већ скоро 14 милијарди година стално шири. Ширењем се васиона разређивала и у неком тренутку је постала прозирна. Светлост која би тада кренула ка нама морала је прелазити све веће и веће настајало растојање, па се због брзине ширења васионе могло десити да светлост остане са оне стране домета. Једноставно речено, толико много простора настаје између давно кренуле светлости и нас да она никада не може до нас стићи. Такође, светлост која од нас креће у дубину, због ширења васионе, никада не може прећи преко граница видљиве васионе. Међутим и тамо има материје, која је комуницирала са нечим са чиме и ми, па је и она за нас реална.

Ма како да нам изгледа чудно, ову посредну реалност налазимо и уз објашњење парадокса близанаца, у делу о успоравању времена инерцијалног система које доводи до заостајања у прошлости или у будућности посматрача. Честица која се од нас инерцијално удаљава има релативно успорен ток времена и стално је у нашој прошлости, све даљој што нам је даља. Док год видимо ту честицу комуницирамо са њом, а једнако она може да комуницира са неким другим деловима нашег система. Према томе, наша прошлост је (посредно) реална са нама.

Слично је и са честицом која нам се инерцијално приближава, али тада долазимо

до закључка да нам је будућност такође реална, да је једина могућа, што је у складу са нашим закључцима о димензијама простор-времена у случају када нема дејства силе. Када се честица нама приближава неинерцијално, јер на њу делује сила, она тада мења брзине и интерагује са различитим варијантама наше будућности. Према томе, различите су и варијанте наше будућности нама једнако реалне, на начин нетипичних (посредних) комуникација.

Све ово указује да сила мења и вероватноћу и перцепцију реалности посматрача. Сила је у стању да примарну реалност мења са секундарном и да замењује секундарне. Због универзалности тих појава, једнако је тачно рећи и обрнуто, да поремећај вероватноће значи присуство силе. Нагомилавање молекула ваздуха ближе поду собе у гравитационом пољу знак је присуства силе, као што је и обрнуто, присуством силе нарушене су (једнолике) вероватноће.

Са становишта ентропије је тумачење Фејнмановог дијаграма 1.29 слично претходном. Појава фотона између електрона прекида једноличност простора, смањује неред, а тиме и ентропију, па електрони спонтано прелазе у простор веће ентропије. Одбијају се. У случају одсуства типичне комуникације електрон и позитрон раде исто, али то сада значи да се привлаче. У случају ширења свемира принцип ентропије (физички систем спонтано прелази у стање веће ентропије) је очигледан. Нове формуле (1.148) и (1.149) само побољшавају званично објашњење. Прва ($T = \gamma T_0$) значи да су даље галаксије (због веће брзине удаљавања и већег γ) топлије. То је логично и због чињенице да су оне дубље у прошлости, када је свемир био гушћи. Друга ($Q = Q_0$) значи да је топлотна енергија непромењена. Сада закон одржања енергије остаје на важности, јер је сила (1.42) која покреће ово ширење свемира свеприсутна и константна (претпостављена сила $F_0 \neq 0$ која одбија галаксије не мора бити константна) од његовог постанка. Просто речено, она је као гравитациона сила планете коју не треба „ложити“, додавајући јој нову енергију.

Поменуту „онострану“ реалност налазимо и у космичким размерама. Замислимо три галаксије A, B и C удаљене милионима светлосних година које се међусобно удаљавају. Сила (1.42) која удаљава C од A посматрано из A расте временом и расте са γ^2. Она има правац и смер вектора $\overrightarrow{AC}$, а њена окомита компонента се не мења. Слично се догађа са галаксијом C посматрано из B, осим што она бежи под силом у смеру $\overrightarrow{BC}$ који није једнак првом. Зато што се на C из A и B виде различите силе, опажају се и различите реалности. Обе су некакве реалности, јер A види C, али види и B које види C. Већ код инерцијалних кретања смо имали различита релативна виђења исте појаве (информације), али сада имамо много веће разлике, сличне онима честице која нам прилази са променама брзине. Посебно, нити спонтани развој ентропије на C није исти са становишта A и B.

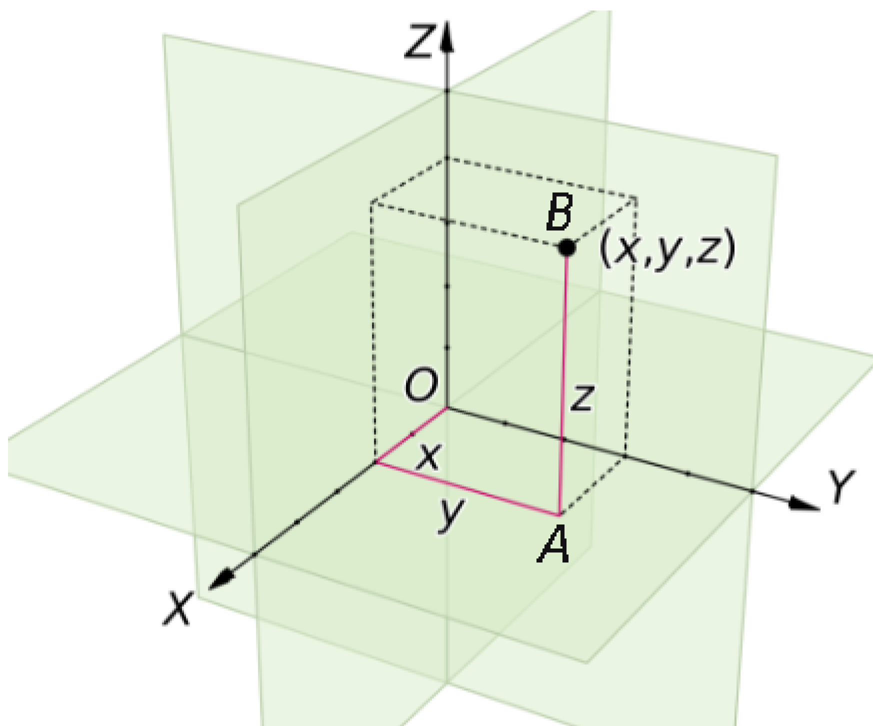
Ово нас враћа на она апсурдна објашњења са почетка ове књиге. Према принципу вероватноће, догађаји теку из прошлости ка будућности тако да физички систем увек заузима углавном највероватнија стања. У складу са тиме, реално обртање временског тока било би само оно у којем би тај систем ишао унатрашке опет ка, у датим условима, највероватнијим стањима. Исто је и са ентропијом. Ако смо се сваким кораком у једном току времена налазили у стањима максималне ентропије, онда би онај који хода нашим стопама временом уназад морао опет пролазити кроз, у датим условима, стања највеће ентропије.

1.4 Симетрије

Овде су математички додаци који се подразумевају у претходном делу књиге. То су углавном познатије теме допуњене мојим идејама. Прва је извођење Лоренцових трансформација из Ајнштајнових принципа, друга подводи те трансформације под геометријске симетрије, а трећа су формалне основе за ширење простор-времена на више временских димензија. Оне су такође и најава даљег рада.

1.4.1 Лоренцове трансформације

У Декартовом правоуглом систему координата $Oxyz$, на слици 1.30, све три координатне осе (апсциса x-оса, ордината y-оса и апликата z-оса) једнако су баждарене и узајамно окомите оријентисане праве линије са заједничким исходиштем у тачки O. У равни Oxy налази се тачка A са координатама $(x, y, 0)$, а на висини z од те равни изнад тачке A налази се тачка B са координатама (x, y, z).



Slika 1.30: Декартове правоугле координате.

Према Питагориној теореми налазимо редом:

$$\overline{OA}^2 = x^2 + y^2, \quad \overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2,$$

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad l = \overline{OB}. \tag{1.169}$$

Када се квадар са дате слике транслира (паралелно помери) за вектор $\overrightarrow{OO'}$, тада теме O квадра прелази у тачку O', а теме B у тачку B', па претходна једнакост постаје

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \tag{1.170}$$

где су $\Delta\xi$ дужине премештања квадра паралелно координатама, редом $\xi = x, y, z$, а Δl је дијагонала, дужина премештања $\overrightarrow{OO'}$.

Након ове безвременске, математичке транслације користимо нове ознаке за дужине страница квадра, али све одговарајуће дужине остају исте. Када већ кажемо да је систем $Oxyz$ прешао у систем $O'x'y'z'$ транслацијом, онда је лако додати да је то померање зависно од протеклог времена t, тако да се дешава константном брзином дефинисаном вектором $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. То значи да се дуж коориднате $\xi \in \{x, y, z\}$ за временски период Δt систем O' померио за дужину $v_\xi \Delta t$ у односу на систем O. Ако су се у почетном тренутку ($t = 0$) два система поклапала ($O \equiv O'$), тада у произвољном тренутку t важе трансформације координата:

$$x' = x - v_x t, \quad y' = y - v_y t, \quad z' = z - v_z t, \quad t' = t. \tag{1.171}$$

То су Галилејеве трансформације, где четврту једначину пишемо само да нагласимо да у оба система, непокретном O и покретном O', време тече једнаком брзином. Нема битног губитка општости када ставимо да је кретање само дуж апсцисе. Тада је укупна брзина број $v = v_x \ne 0$, док су остале две компоненте брзине нуле ($v_y = v_z = 0$).

Галилејеве трансформације су побољшаване Лоренцовим, првенствено због експеримената Мајкелсона и Морлија (в. [15]). Њима је од 1887. године установљено да се *светлост креће увек истом брзином у вакууму*, око $c = 3 \times 10^8$ m/s, без обзира на брзину извора. Сазнање М-М експеримената је Ајнштајн узео за свој други принцип у раду који је објавио 1905. године, а који је данас познат као специјална теорија релативности. Први принцип му је био релативност кретања, да *физички закони система у којем посматрач мирује не зависе од тога да ли се тај систем креће* једнолико праволинијски у односу на неко друго тело или посматрача.

Укратко, Ајнштајнови принципи релативности су: 1. сва једнолико праволинијска кретања су равноправна и 2. брзина светлости у вакууму не зависи од брзине извора.

Пример 1.4.1. *Извести Лоренцове трансформације из Ајнштајнових принципа.*

Решење. Ајнштајнова релативност за четврту координату користи ct а то је пут који светлост пређе за време t. За систем O' који се креће брзином v у односу на систем O дуж апсциса, у најопштијем случају можемо ставити:

$$x' = \gamma(x - \beta\, ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = A\, ct - Bx, \tag{1.172}$$

где су γ, β, A, B непознати бројеви које тек треба одредити. Прва и четврта координата су функције зависне од узајамне брзине v кретања два система и евентуално још једино од брзине светлости c. Ове трансформације би постале Галилејеве (1.171) ако би било $\gamma = 1$, $\beta = v/c$, $A = 1$ и $B = 0$.

Када неки објекат мирује у O' на позицији $x' = 0$ он се креће константном брзином v апсцисом система O, тако да је $x = vt$, па је $\beta = v/c$ те $x' = \gamma(x - \frac{v}{c}\, ct)$. Према принципу релативности, инверзне трансформације између O' и O морају имати исту форму али са брзином супротног предзнака, па налазимо $x = \gamma(x' + \frac{v}{c}\, ct')$ за исти коефицијент γ. При томе је $t = x/c$ када год је $t' = x'/c$ и сменом у претходне једнакости затим множењем добијамо $xx' = \gamma^2(1 - v^2/c^2)xx'$. Отуда, за прву једначину:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{1.173}$$

Први коефицијент се назива и Лоренцов фактор и већ смо га помињали. Једначина из (1.172) која дефинише трансформацију времена, може се добити из услова $x' = ct'$ и $x = ct$ сменом у претходне просторне координате одакле $ct' = \gamma(ct - \beta x)$. Према томе, Лоренцове трансформације су:

$$x' = \gamma(x - \beta\, ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x), \tag{1.174}$$

где су γ и β дати са (1.173). □

Због другог Ајнштајновог принципа, у оба система мерено светлост прелази неки пут за дато време истом брзином, што значи $\Delta l/\Delta t = \Delta l'/\Delta t' = c$, а отуда наслућујемо да је израз

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \tag{1.175}$$

инваријанта Лоренцових трансформација. То је поопштена Питагорина теорема, за 4-Д простор-време специјалне теорије релативности.

Пример 1.4.2. *Доказати да је израз (1.175) инваријанта Лоренцових трансформација.*

Решење. Полазећи од (1.172) добијамо, редом:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta\, c\Delta t), \quad c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x),$$

$$(\Delta x')^2 = \gamma^2(\Delta x - \beta\, c\Delta t)^2, \quad c^2(\Delta t')^2 = \gamma^2(c\Delta t - \beta\Delta x)^2,$$

$$\begin{cases} (\Delta x')^2 = \gamma^2[(\Delta x)^2 - 2\beta\,\Delta x\, c\Delta t + \beta^2\, c^2(\Delta t)^2] \\ c^2(\Delta t')^2 = \gamma^2[c^2(\Delta t)^2 - 2\beta\, c\Delta t\,\Delta x + \beta^2\,(\Delta x)^2]. \end{cases}$$

Отуда одузимањем:

$$(\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2 = \gamma^2[(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2] - \gamma^2\beta^2[(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2]$$
$$= \gamma^2(1-\beta^2)[(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2]$$
$$= (\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2.$$

Додавањем квадрата интервала остале две координате добијамо $(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2$, а то је оно што је и требало доказати. □

Таласна једначина која следи из Максвелових радова о електромагнетизму гласи

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0, \tag{1.176}$$

при чему је $1/c^2 = \mu_0\varepsilon_0$, где је $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2 магнетна, а $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F/m електрична константа пермеабилности вакуума.

Пример 1.4.3. *Доказати да је израз (1.176) Лоренцова инваријанта.*

Решење. Користећи (1.172) добијамо:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial x} = \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} - \beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'},$$

јер је $\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x} = 0$, а $\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma$ и $\frac{\partial ct'}{\partial x} = -\beta\gamma$. Други парцијални извод је извод првог извода, па слично налазимо, редом:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial ct'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial ct'}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} - \beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial ct'}\left(\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} - \beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\right)\frac{\partial ct'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial(x')^2} - 2\beta\gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'\,\partial ct'} + \beta^2\gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial(ct')^2}. \tag{1.177}$$

За другу и трећу координату налазимо:

$$\begin{cases} \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial y'} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{\partial\Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial z} = \frac{\partial\Psi}{\partial z'}, \end{cases}$$

а затим слично и друге изводе:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial(y')^2}, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial(z')^2}. \tag{1.178}$$

Истим поступком добијамо први парцијални извод за четврту координату:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial ct} = \frac{\partial\Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial ct} + \frac{\partial\Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial ct} + \frac{\partial\Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial ct} + \frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial ct} = -\beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'},$$

јер је $\frac{\partial y'}{\partial ct} = \frac{\partial z'}{\partial ct} = 0$, а $\frac{\partial x'}{\partial ct} = -\beta\gamma$ и $\frac{\partial ct'}{\partial ct} = \gamma$. Отуда:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial(ct)^2} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(-\beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\right)\frac{\partial x'}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial ct'}\left(-\beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\right)\frac{\partial ct'}{\partial ct}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial(ct)^2} = \beta^2\gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial(x')^2} - 2\beta\gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'\,\partial ct'} + \gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial(ct')^2}. \tag{1.179}$$

Уврштавањем и након сређивања добијамо

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial(x')^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial(y')^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial(z')^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial(t')^2} = 0, \tag{1.180}$$

а то је и требало доказати. □

Проналазећи управо ову инваријанту (1.180), Лоренц[50] је пре Ајнштајна дошао до трансформација које се по њему и називају. Међутим, он их није знао протумачити. Лоренц је извео исправан закључак да М-М експеримент показује контракцију дужина у правцу кретања, али то није видео у неком ширем контексту. Ипак, он је развио електромагнетну теорију светлости, проучавао је дифракцију светлости у кристалима, бинарне гасове и први је прорачунао цепање синглета спектралних линија на три компоненте у магнетном пољу. Лоренц је 1902. године добио Нобелову награду за физику за радове из електромагнетне теорије светлости.

Из Лоренцових трансформација је настала специјална теорија релативности, а начин на који их је Ајнштајн објаснио и како је даље тумачио једнолико праволинијска кретања оставио је даље трагове у физици.

[50]Hendrik Lorentz (1853-1902), холандски физичар.

1.4.2 Ротације

Оно што је и исто у различитом, у геометрији се назива *симетрија*, а у физици *законом природе*. Примери геометријских симетрија су огледалске рефлексије, осне симетрије, централне симетрије, транслација, а свака од њих се може добити неком ротацијом. Из значаја ротација у геометрији следи њихова важност за физику.



Slika 1.31: Рефлексије природе на води.

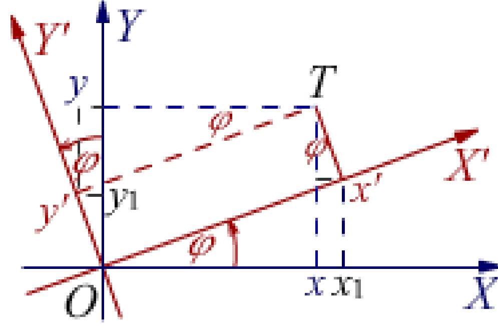
Осна симетрија тачака у равни је пресликавање које конструишемо када кроз дате тачке повучемо нормале (окомице) на осу симетрије (праву), а затим их пренесемо на исту удаљеност са друге стране те осе. Три тачке које чине троугао једне оријентације пресликаће се осном симетријом у три тачке које чине подударан троугао супротне оријентације. Зато, њихово поклапање није могуће добити премештањем датог троугла у равни симетрије, али је то могуће 3-Д ротацијом дате равни око њене осе симетрије. Слично би се огледалска симетрија која леву оријентацију рефлектује у десну и обрнуто, могла добити 4-Д ротацијом 3-Д простора око равни огледала.

Централна симетрија у равни има једну заједничку тачку те равни која је средиште дужи одређеном тачкама оригинала и копије. Она се може добити ротацијом те равни око централне тачке за испружен угао. Транслација, померање тачака за дати вектор, може се добити помоћу две централне симетрије, дакле са две ротације. Све ово се учи у средњим школама, па о томе нећемо детаљније. Приметите само да због необичних веза геометрије са физиком није изненађење да се Лоренцове трансформације могу представити ротацијом.

На слици 1.32 правоугли Декартов систем координата OXY ротиран је у истој равни у систем $OX'Y'$ за оријентисани угао φ око исходишта. Иста тачка T те равни у два система има координате $T(x,y)$ и $T(x',y')$. Са слике читамо:

$$\overline{Ox_1} = \overline{Ox} + \overline{xx_1}, \quad \overline{Oy_1} = \overline{Oy} - \overline{yy_1},$$

$$x'\cos\varphi = x + y'\sin\varphi, \quad y'\cos\varphi = y - x'\sin\varphi.$$



Slika 1.32: Ротација координата за угао φ.

Отуда директне и инверзне трансфомације:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases} \tag{1.181}$$

Ове трансформације можемо писати и матрично, рецимо директне:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \tag{1.182}$$

или краће $\mathbf{r} = \hat{R}\mathbf{r}'$, где су компоненте вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ и матрице ротације $\hat{R}$ очигледне.

Узмемо ли за компоненте ових вектора Лоренцову апсцису $x_1 = x$ и временску осу $x_4 = ict$, добијамо Лоренцову директну и инверзну ротацију:

$$\begin{cases} x_1 = x_1'\cos\varphi - x_4'\sin\varphi \\ x_4 = x_1'\sin\varphi + x_4'\cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = x_1\cos\varphi + x_4\sin\varphi \\ x_4' = -x_1\sin\varphi + x_4\cos\varphi. \end{cases} \tag{1.183}$$

Након смене $\varphi = i\phi$, $i = \sqrt{-1}$ и преласка на синус и косинус хиперболни, ове обичне постају хиперболне Лоренцове ротације:

$$\begin{cases} x = x'\operatorname{ch}\phi - ct'\operatorname{sh}\phi \\ ct = -x'\operatorname{sh}\phi + ct'\operatorname{ch}\phi, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x\operatorname{ch}\phi + ict\operatorname{sh}\phi \\ ct' = x\operatorname{sh}\phi + ct\operatorname{ch}\phi. \end{cases} \tag{1.184}$$

Везе међу њима су познате релације између обичних и хиперболних (хиперболне, или хиперболичне функције је увео у употребу Рикати[51]) тригонометријских функција: $\sin\varphi = -i\operatorname{sh}(i\varphi)$ и $\cos\varphi = \operatorname{ch} i\varphi$. Стављајући $x' = x_1' = 0$ налазимо брзину примованог система у непримованом:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{x}{ct} = \frac{ict'\operatorname{sh}\phi}{ct'\operatorname{ch}\phi} = i\operatorname{th}\phi = \operatorname{tg}\varphi. \tag{1.185}$$

Веза између тангенса хиперболног (th) и обичног (tg) је $\operatorname{th}\phi = -i\operatorname{tg}(i\phi) = -i\operatorname{tg}\varphi$, а отуда наведено $\beta = \operatorname{tg}\varphi$.

Основне хиперболне тригонометријске функције су:

$$\begin{cases} \operatorname{sh}\phi = \frac{e^{\phi}-e^{-\phi}}{2} & \operatorname{ch}\phi = \frac{e^{\phi}+e^{-\phi}}{2} \\ \operatorname{th}\phi = \frac{e^{\phi}-e^{-\phi}}{e^{\phi}+e^{-\phi}} & \operatorname{cth}\phi = \frac{e^{\phi}+e^{-\phi}}{e^{\phi}-e^{-\phi}}. \end{cases} \tag{1.186}$$

[51] Vincenzo Riccati (1707-1775), италијански математичар

То су редом синус, косинус, тангенс и котангенс хиперболни. Да оне заиста доводе до релација (1.184) видимо из развоја обичних и хиперболних тригонометријских функција у Маклоренове редове:

$$\begin{cases} \operatorname{sh}\phi = \phi + \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} + \frac{\phi^7}{7!} + \dots, & \operatorname{ch}\phi = 1 + \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} + \frac{\phi^6}{6!} + \dots, \\ \sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots, & \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots, \end{cases} \tag{1.187}$$

па стављајући поменуту смену $\varphi = i\phi$, i је имагинарна јединица. Из дефиниција (1.186) лако налазимо $\operatorname{ch}^2\phi - \operatorname{sh}^2\phi = 1$, а затим и остале основне идентитете:

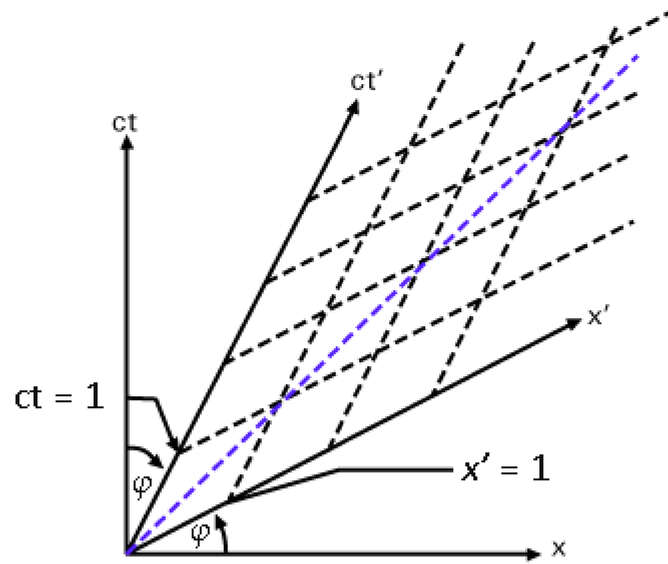
$$\begin{cases} \operatorname{th}\phi = \operatorname{sh}\phi/\operatorname{ch}\phi & \operatorname{cth}\phi = \operatorname{ch}\phi/\operatorname{sh}\phi \\ \operatorname{sh}2\phi = 2\operatorname{sh}\phi\operatorname{ch}\phi & \operatorname{ch}2\phi = \operatorname{ch}^2\phi + \operatorname{sh}^2\phi, \end{cases} \tag{1.188}$$

или рецимо $\operatorname{th}2\phi = 2\operatorname{th}\phi/(1+\operatorname{th}^2\phi)$, када већ помињемо двоструке углове. Сви остали идентитети обичне тригонометрије такође су слични хиперболним. На пример, адиционе формуле за збир и разлику углова хиперболних функција су:

$$\begin{cases} \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y \pm \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y \\ \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y \pm \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y \\ \operatorname{th}(x \pm y) = (\operatorname{th}x \pm \operatorname{th}y)/(1 \pm \operatorname{th}x\operatorname{th}y). \end{cases} \tag{1.189}$$

Ипак су видљиве и разлике.

Лоренцове трансформације (1.182) скупљају x и ct осу, за разлику од ротације (1.183) код којих угао између апсисе и ординате након ротације остаје исти - прав. На слици 1.33 видимо тај ефекат.



Slika 1.33: Лоренцове трансформације стишћу осе.

Када је брзина примованог система 60 одсто брзине светлости, биће $v = 1,8 \times 10^8$ m/s, односно $\beta = v/c = 0,6$. Тада је угао ротације $\varphi = \operatorname{arctg} 0,6 \approx 31°$. Обе осе, x и ct, се Лоренцовом „ротацијом“ нагињу за угао φ према симетрали квадранта (испрекидана плава линија) са којом би се поклопиле у случају да је $v = c$. Догађаји на истом

месту покретног система $O'x'ct'$ су на истој (испрекиданој) паралели са ct'-осом, док се истовремени догађаји налазе на појединим испрекиданим паралелама са x'-осом. У непокретном систему $Ox\,ct$, догађаји на истом месту били би на паралели са ct-осом, а истовремени догађаји били би на паралели са x-осом. Са слике 1.33 видимо да у два система O и O' нити догађаји „на истом месту“ нити „истовремени“ нису исти.

Док систем O' одлази, догађаји у њему одлазе све даље у прошлост система O, али и обрнуто, непокретни систем је истовремен са све даљим догађајима из прошлости покретног система. Супротно томе, када се посматрач из система O' приближава посматрачу из система O они су један другоме у све ближој будућности. То пре свега значи да релативно (оно у другом систему) време протиче спорије од сопственог, а затим доводи до привида који називамо „парадокс близанаца“. Те ефекте смо већ расправили, а и следећа својства комплексних бројева смо такође помињали.

Ротације (1.181) можемо добити и помоћу комплексних бројева. Комплексан број $z = x + iy \in \mathbb{C}$ са својим реалним $\Re(z) = x$ и имагинарним делом $\Im(z) = y$, који су реални бројеви ($x, y \in \mathbb{R}$), у комплексној равни представљамо тачком z са апсцисом и ординатом, редом:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha. \tag{1.190}$$

Модуо односно интензитет комплексног броја је реалан позитиван број $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент комплексног броја је угао $\alpha = \angle xOz = \text{arctg}(y/x)$. Када је дат јединични комплексни број $z_0 = x_0 + iy_0$, такав да је $|z_0| = 1$, при чему је $x_0 = \cos\varphi$ и $y_0 = \sin\varphi$, тада је производ:

$$zz_0 = (x + iy)(z_0 + iy_0) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0) =$$

$$= r[(\cos\alpha\cos\alpha_0 - \sin\alpha\sin\alpha_0) + i(\sin\alpha\cos\alpha_0 + \cos\alpha\sin\alpha_0)],$$

$$zz_0 = r[\cos(\alpha + \alpha_0) + i\sin(\alpha + \alpha_0)], \tag{1.191}$$

где су примењене адиционе формуле за косинус и синус збира. Према томе, множење јединичним комплексним бројем $z_0 = x_0 + iy_0$ комплексног броја $z = x + iy$ представља ротацију броја z око исходишта комплексне равни за аргумент, угао $\alpha_0 = \text{arctg}(y_0/x_0)$, броја z_0. Множењем истим z_0 читава комплексна раван се ротира за исти угао α_0.

Због ове адитивности аргумената комплексних бројева и познате адитивности експонената при множењу степених функција истих база, показује се да важи

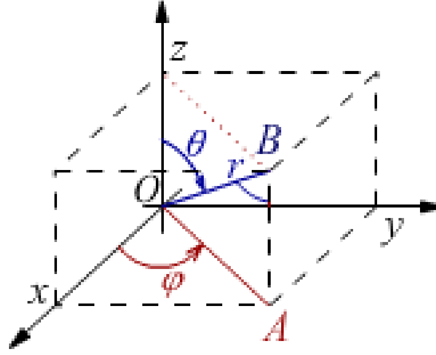
$$z = x + iy = re^{i\alpha}, \tag{1.192}$$

где је $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\text{tg}\,\alpha = y/x$. Доказ се може извести развојем експоненцијалне функције (овде $e^{i\alpha}$) у Маклоренов ред. Тај иначе познати запис комплексног броја помоћу експоненцијалне функције, са базом Ојлеровим бројем $e = 2,71828\dots$, баца ново светло на овде раније изведене једначине гравитационог поља (1.137). Отвара се могућност посматрања гравитационог поља као непрекидног простора мноштва малих (инфинитезималних) инерцијалних система координата аналогних Лоренцовим.

Уместо читавих координатних оса x и ct, користићемо њихове мале (инфинитезималне) делове dx и cdt, при чему ћемо Лоренцову „апсцису“, аналогију правца кретања специјалне релативности, постављати увек радијално у правцу гравитационог поља. Зато ћемо тај правац означавати другачије, рецимо са dr уместо dx. Друге координате, попут $d\varphi$ и $d\theta$ које су у случају сферног система $Or\varphi\theta$ окомите на правац простирања

гравитационог поља, гравитација нeће деформисати. Наиме, када би све координате биле једнако измењене, резултат деловања на равни био би опет равни Еуклидов простор у којем нема гравитационе силе. Са друге стране, ова несиметрична, радијална промена, биће узроком и познатог гравитационог ефекта бочног стискања тела, окомито на радијалне силнице поља.

Овде подразумевамо сферне координате као на слици 1.34. Ако их будемо означавали *коваријантним* (доњим) индексима, биће у редоследу $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$ и $x_3 = \theta$, са придруженом временском координатом $x_4 = ict$, где је i имагинарна јединица, а c брзина светлости. Исти је редослед и у случају означавања контраваријантним (горњим) индексима x^μ, $\mu = 1, 2, 3, 4$.



Slika 1.34: Сферне координате $Or\varphi\theta$.

Са слике се види $r = \overline{OB}$, а затим:

$$\begin{cases} x = \overline{OA}\cos\varphi, & \overline{OA} = r\sin\theta, \\ y = \overline{OA}\sin\varphi, & z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{1.193}$$

затим лако налазимо трансформације:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ \theta = \arccos\frac{z}{r}. \end{cases} \tag{1.194}$$

Деривације ових координата су:

$$\begin{cases} dx = \cos\varphi\sin\theta\,dr - r\sin\varphi\sin\theta\,d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\,d\theta \\ dy = \sin\varphi\sin\theta\,dr + r\cos\varphi\sin\theta\,d\varphi + r\sin\varphi\cos\theta\,d\theta \\ dz = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta, \end{cases} \tag{1.195}$$

па квадрирањем и уврштавањем (сабирањем) у одговарајући релативистички израз (1.175), након сређивања добијамо

$$ds^2 = dr^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + r^2\,d\theta^2 - c^2dt^2. \tag{1.196}$$

То је релативистички интервал за инфинитезимале у сферним координатама $Or\varphi\theta$ за равни простор-време.

Подсетимо се да се анализом вертикалног пада (1.128) може добити метрика

$$ds^2 = e^{2GM/rc^2}\,dr^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + r^2\,d\theta^2 - e^{-2GM/rc^2}\,c^2dt^2, \tag{1.197}$$

а затим апроксимацијом израз

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2\, d\theta^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2, \tag{1.198}$$

који је једнак Шварцшилдовој метрици (1.137). Уопште, гравитационо поље у датој тачки у датом тренутку делује силом која је вектор и која присиљава дато тело на „слободан пад“. Ако у тој тачки поставимо инфинитезимални систем координанта тако да r-оса има правац дејства силе, онда можемо посматрати (променљиву) раван $O\,r\,ct$ унутар које ће важити трансформације аналогне Лоренцовим. То следи из симетрија за које очекујемо да ће се из геометрије пренети у физику. То је нова идеја коју потврђује следећа теорема.

Подразумевамо сферни систем координата $Or\varphi\theta$ са центром гравитације у исходишту, а посматрамо централно симетрично поље, па ће евентуална два таква система имати исте углове φ и θ.

Теорема 1.4.4. *Дате су трансформације диференцијала*

$$\begin{cases} dr = \chi\, dr' + i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\, cdt' \\ cdt = i\gamma\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\, dr' + \gamma^2\chi\, cdt', \end{cases} \tag{1.199}$$

где је i имагинарна јединица, $\gamma = (1 - 2GM/rc^2)^{-1/2}$, а $\chi \in \mathbb{C}$ произвољан параметар. Показати да су то опште трансформације које метрику гравитације (1.198) преводе у инерцијалну метрику (1.196).

Доказ. Игноришемо координате које не утичу на резултат ($d\varphi = d\varphi'$ и $d\theta = d\theta'$) и полазимо од система:

$$\begin{cases} dr = \alpha_{rr}\, dr' + \alpha_{rt}\, cdt' \\ cdt = \alpha_{tr}\, dr' + \alpha_{tt}\, cdt', \end{cases} \tag{1.200}$$

где α_{mn} зависе само од r. Сменом у скраћени израз (1.198) добијамо:

$$ds^2 = \gamma^2\, dr^2 - \gamma^{-2}\, c^2 dt^2 =$$

$$= \gamma^2(\alpha_{rr}\, dr' + \alpha_{rt}\, cdt')^2 - \gamma^{-2}(\alpha_{tr}\, dr' + \alpha_{tt}\, cdt')^2$$

$$= (\gamma^2\alpha_{rr}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tr}^2)\, dr'^2 + 2(\gamma^2\alpha_{rr}\alpha_{rt} - \gamma^{-2}\alpha_{tr}\alpha_{tt})\, dr'\, cdt' + (\gamma^2\alpha_{rt}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tt}^2)\, c^2 dt'^2.$$

Изједначавајући овај интервал са $dr'^2 - c^2dt'^2$ добијамо систем једначина:

$$\begin{cases} \gamma^2\alpha_{rr}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tr}^2 = 1, \\ \gamma^2\alpha_{rr}\alpha_{rt} - \gamma^{-2}\alpha_{tr}\alpha_{tt} = 0, \\ \gamma^2\alpha_{rt}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tt}^2 = -1. \end{cases}$$

То су три једначине са четири непознате алфе што значи да имамо произвољан параметар, нека је то $\alpha_{rr} = \chi \in \mathbb{C}$. Из прве једначине следи $\alpha_{tr} = \pm i\gamma\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}$. Из треће једначине добијамо $\alpha_{rt} = \pm i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^{-2}\alpha_{tt}^2}$, што уврштено у средњу даје, редом:

$$\gamma^2\chi(\pm i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^{-2}\alpha_{tt}^2}) - \gamma^{-2}(\pm i\gamma\sqrt{1-\gamma^2\chi^2})\alpha_{tt} = 0,$$

$$\gamma\chi\sqrt{1-\gamma^{-2}\alpha_{tt}^2} = \gamma^{-1}\alpha_{tt}\sqrt{1-\gamma^2\chi^2},$$

$$\chi^2(\gamma^2 - \alpha_{tt}^2) = \alpha_{tt}^2(\gamma^{-2} - \chi^2),$$
$$\chi^2\gamma^2 = \alpha_{tt}^2\gamma^{-2},$$

одакле следи $\alpha_{tt} = \pm\gamma^2\chi$ и $\alpha_{rt} = \pm i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}$. Када узмемо само горње предзнаке, добијамо тражени систем. □

Било је скептичних око овог резултата, да се равна (псеудо еуклидска) метрика простор-времена Минковског може тек тако превести у метрику закривљеног простора гравитације, па наводим још објашњења.

Када боље погледамо трансформације (1.200) видимо да множењем прве са γ а друге са $i\gamma^{-1}$ добијамо:

$$\begin{cases} \gamma\, dr = \gamma\chi\, dr' + \sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\, icdt' \\ \gamma^{-1}\, icdt = -\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\, dr' + \gamma\chi\, icdt'. \end{cases} \tag{1.201}$$

Сменом $dy_1 = \gamma dr$, $dy_4 = \gamma^{-1}icdt$ и $dx_1 = dr'$, $dx_4 = icdt$, затим:

$$\cos\varphi = \gamma\chi, \quad \sin\varphi = \sqrt{1-\gamma^2\chi^2}. \tag{1.202}$$

оне постају обичне ротације, јер је

$$\begin{cases} dy_1 = \cos\varphi\, dx_1 + \sin\varphi\, dx_4, \\ dy_4 = -\sin\varphi\, dx_1 + \cos\varphi\, dx_4. \end{cases} \tag{1.203}$$

Сменом $dy_0 = \gamma^{-1}cdt$, $dx_0 = cdt$ и $\varphi = i\phi$ добијамо

$$\begin{cases} dy_1 = \operatorname{ch}\phi\, dx_1 + \operatorname{sh}\phi\, dx_0, \\ dy_0 = \operatorname{sh}\phi\, dx_1 + \operatorname{ch}\phi\, dx_0, \end{cases} \tag{1.204}$$

а то су хиперболне ротације, односно Лоренцове трансформације. Свакако је

$$ds^2 = (\gamma dr)^2 - (\gamma^{-1}cdt)^2 = (dr')^2 - (cdt')^2, \tag{1.205}$$

где је $\gamma = 1/\sqrt{1-2GM/rc^2}$ узето из (1.198), али би оно могло бити узето и из (1.197) или неке друге сличне метрике.

Да би хиперболне трансформације (1.202) биле „реалне“ (еквивалент Лоренцовим) довољно је $|\gamma\chi| \le 1$. Тада из (1.204) и $\beta = i\operatorname{th}\phi$ добијамо

$$\gamma\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \tag{1.206}$$

што открива природу другог коефицијента (χ). То је број без димензија који одређује почетну брзину тела у слободном паду у гравитационом пољу. Другачије речено, број χ дефинише висину са које је дато тело почело падати.

На пример, у случају нулте почетне брзине у бесконачности ($v \to 0$ када $r \to \infty$), из $ma = F_g$ израчунавамо $v^2 = 2GM/r$, а отуда $\gamma\chi = 1$. Трансформације (1.199) постају $\gamma\, dr = dr'$ и $\gamma^{-1}cdt = cdt'$ што значи да сопствене вредности $dr_0 = dr'$ и $dt_0 = dt'$ тачака у мировању дају:

$$dr = dr_0\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}, \quad dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}} \tag{1.207}$$

релативно у односу на падајуће тело. А тај резултат је познат.

Симетрија релативистичког интервала (1.205) указује на могуће формалне замене r са ict. Без обзира колико она била чудна, било би површно на њу гледати рецимо са подсмехом и не испитати могућности замена просторних координата временским. На такву инверзију указују и трансформације (1.201) или (1.199). Али она није тема ове већ следеће свеске.

1.4.3 Кватерниони

Знамо да је скуп реалних бројева подскуп скупа комплексних бројева ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) и да је скуп комплексних бројева довољан за решење сваке полиномске једначине (основна теорема алгебре). На тај начин, због немогућности тачних решења у реалном, разумели смо потребу квантне механике за комплексним бројевима. Онима који верују у дубље везе математике и физике ово је могао бити повод да открију математику квантног света, онакву каква је.

Са овом књигом сам на сличној прекретници. Анализа димензија простор-времена доказује да их има више од четири, тачније да временских димензија има онолико колико има нама познатих просторних, па се поставља питање математичког апарата који би их све (углавном) могао описивати. Тема овог поднаслова је да нас подсети да такав апарат заиста и постоји.

Једна од једноставнијих надградњи скупа комплексних бројева је скуп матрица типа 2×2. Јединична матрица је

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.208}$$

Као што знамо, она је једина неутрална при множењу других матрица тако да за сваку матрицу $\hat{A}$ (истог типа) важи $\hat{I}\hat{A} = \hat{A}\hat{I} = \hat{A}$. Остале основне матрице поделићемо у две групе, према предзнаку на десној страни квадратне једнакости:

$$\hat{\sigma}^2 = \pm\hat{I}. \tag{1.209}$$

Решавањем ове једначине за предзнак плус (+) добијамо Паулијеве[52] матрице:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.210}$$

Решавањем горње једначине за предзнак минус (−) добијамо кватернионе:

$$\hat{\sigma}_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_6 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.211}$$

Матрице су нумерисане тако да је:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 = i\hat{\sigma}_3 & \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3 = i\hat{\sigma}_1 & \hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1 = i\hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_4\hat{\sigma}_5 = \hat{\sigma}_6 & \hat{\sigma}_5\hat{\sigma}_6 = \hat{\sigma}_4 & \hat{\sigma}_6\hat{\sigma}_4 = \hat{\sigma}_5, \end{cases} \tag{1.212}$$

где је i имагинарна јединица. Поред тога је

$$\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_4 = \hat{\sigma}_6\hat{\sigma}_1 = i\hat{I}. \tag{1.213}$$

[52] Wolfgang Pauli (1900-1958), аустријско-швајцарско-амерички теоријски физичар.

Иначе, множење матрица није комутативно.

Поред уобичајене употребе ових матрица, Паулијевих придружених спину фермиона а свих шест за представљање ротација, матрице кватерниона можемо употребити и за разликовање различитих имагинарних димензија времена.

Јединична матрица заједно са три Паулијеве (или кватернионске) чини комплетан скуп матрица типа 2×2. То значи да за произвољну матрицу $\hat{A}$ постоје јединствена четири броја x, y, u, v таква да је

$$x\hat{\sigma}_m + y\hat{\sigma}_n + u\hat{\sigma}_p + v\hat{I} = \hat{A}, \tag{1.214}$$

када су m, n, p редом индекси 1, 2 и 3 или су индекси 4, 5 и 6. Такве четири матрице могу да чине базу 4-Д векторског простора. Са друге стране то значи да се помоћу саме три матрице Паулија (или кватерниона) не може линеарним операцијама (вишеструким сабирањима) добити јединична матрица.

Пример 1.4.5. *Показати да Паулијеве матрице са јединичном чине потпуни скуп.*

Решење. Полазимо од (1.213):

$$x\hat{\sigma}_1 + y\hat{\sigma}_2 + u\hat{\sigma}_3 + v\hat{I} = \hat{A},$$

$$x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u+v & x-iy \\ x+iy & -u+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} u+v = a \\ x-iy = b \\ x+iy = c \\ -u+v = d, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b+c}{2} \\ y = i\frac{b-c}{2} \\ u = \frac{a-d}{2} \\ v = \frac{a+d}{2}. \end{cases}$$

Према томе, за произвољне унапред дате бројеве a, b, c, d увек постоје јединствени бројеви x, y, u, v, а то је оно што је требало показати. □

Пример 1.4.6. *Показати да кватерниони са јединичном матрицом чине потпуни скуп.*

Решење. Користећи претходно, добијамо редом:

$$x\hat{\sigma}_4 + y\hat{\sigma}_5 + u\hat{\sigma}_6 + v\hat{I} = \hat{A},$$

$$x\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

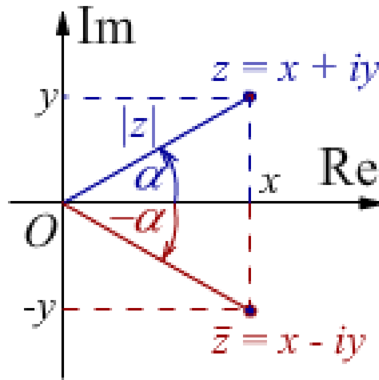
$$\begin{pmatrix} ix+v & y+iu \\ -y+iu & -ix+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\frac{a-d}{2} & \frac{b-c}{2} \\ -i\frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}.$$

За произвољне дате бројеве a, b, c, d постоје јединствени x, y, u, v, што је и требало показати. □

Формално 4-Д простор-време се може добити и са три Паулијеве матрице плус $\hat{\sigma}_4$, односно са три Паулијеве и линеарном комбинацијом кватерниона која мора садржавати $\hat{\sigma}_4$. Такву комбинацију кватерниона означимо са $\hat{\sigma}_0$ и назовимо временском димензијом. Због обавезног присуства $\hat{\sigma}_4$, а необавезних $\hat{\sigma}_5$ и $\hat{\sigma}_6$, након избора Паулијевих матрица за базу простора, видимо да постоји извесна несиметрија у избору матрица кватерниона као временских димензија. Штавише, у обрнутом случају, када бисмо бирали матрице кватерниона за базу простора, за четврту, временску димензију могли бисмо узети само јединичну матрицу.

Било који пар, од једне матрице кватерниона и једне од преостале четири, добро репрезентује скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$. Комплексан број $z = x+iy$, где су x и y реални бројеви, можемо представити тачком са координатама (x, y) у Декартовом систему. Апсцису (x-осу) тада чине реални делови комплексних бројева, а ординату (y-осу) имагинарни. Скуп свих комплексних бројева $\mathbb{C}$ тако постаје скуп тачака комплексне равни $\mathbb{C}$. Оваква репрезентација се види на слици 1.35.



Slika 1.35: Комплексна раван $\mathbb{C}$.

Помоћу ове слике смо разумели обичне ротације, а сада ту причу настављамо мало детаљније. Удаљеност од исходишта O до комплексног броја z, тачке z, је модуо комплексног броја z који је реалан број $|z|$. Угао између позитивног смера реалне осе (апсцисе) и оријентисане дужи Oz је аргумент комплексног броја z који је реалан број $\arg(z)$. Са слике 1.35 лако читамо:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho, \quad \arg(z) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \alpha. \tag{1.215}$$

Обрнуте трансформације су:

$$x = \rho\cos\alpha, \quad y = \rho\sin\alpha. \tag{1.216}$$

Према томе, комплексни број $z = x + iy$ можемо писати:

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha). \tag{1.217}$$

То је репрезентација броја z у поларним координатама.

Теорема 1.4.7. *За све комплексне бројеве* $z_1 = x_1 + iy_1$ *и* $z_2 = x_2 + iy_2$ *важи:*

1. $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$;
2. $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$;
3. $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Доказ. 1. Непосредним множењем, због закона дистрибуције, добијамо:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2,$$

одакле због закона комутације, груписањем сабирака следи тражена једнакост.

2. Из претходног израза налазимо:

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) = \rho\left(\frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\rho} + i\frac{x_1y_2 + y_1x_2}{\rho}\right), \tag{1.218}$$

где је $\rho = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2}$. Приметимо да је

$$\left(\frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x_1y_2 + y_1x_2}{\rho}\right)^2 = 1,$$

што значи да је $\rho = |z_1z_2|$, а разломци су $(x_1x_2 - y_1y_2)/\rho = \cos\alpha$ и $(x_1y_2 + y_1x_2)/\rho = \sin\alpha$, где је $\alpha = \arg(z_1z_2)$.

3. Покажимо да је угао α збир углова $\alpha_1 = \arg(z_1)$ и $\alpha_2 = \arg(z_2)$. Из:

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + i\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right), \tag{1.219}$$

следи да постоји угао α_1 такав да је:

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1}{\rho_1}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{y_1}{\rho_1}, \quad \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \tag{1.220}$$

јер је $\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 = 1$. Слично налазимо за z_2. Након тога користимо иначе познате адиционе формуле тригонометрије:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha_1 + \alpha_2) &= \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 \\
&= \frac{x_1x_2}{\rho_1\rho_2} - \frac{y_1y_2}{\rho_1\rho_2} = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \\
&= \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2}} \\
&= \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{(x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2) + (x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2)}} \\
&= \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}} = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\rho}, \\
\cos(\alpha_1 + \alpha_2) &= \cos\alpha.
\end{aligned}$$

Такође налазимо $\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2 = \sin\alpha$. □

То су били помало необични докази иначе познатих ставова. Такође је неуобичајен и доказ следеће теореме.

Заменом $i \to -i$ комплексни број $z = x + iy$ мењамо у њему *конјугован* $\bar{z} = x - iy$. У комплексној равни, конјуговано комплексни бројеви z и $\bar{z}$ су осно симетрични у односу на реалну осу, као што се види на слици 1.35.

Теорема 1.4.8. *За све комплексне бројеве* $z_1 = x_1 + iy_1$ *и* $z_2 = x_2 + iy_2$ *важи:*

1. $\bar{z}_1 z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - y_1x_2)$;
2. $\Re(\bar{z}_1 z_2) = |z_1||z_2|\cos\beta$;
3. $\Im(\bar{z}_1 z_2) = |z_1||z_2|\sin\beta$;

где је $\beta = \angle z_1 O z_2$ *угао између оријентисаних дужи* Oz_1 *и* Oz_2.

Доказ. 1. Следи сменом $y_1 \to -y_1$ из претходне, став 1. теорема 1.4.7.

2. Применимо косинусну теорему на троугао Oz_1z_2:

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos\beta.$$

Отуда:

$$|z_1||z_2|\cos\beta = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2) =$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[2x_1x_2 + 2y_1y_2] = \Re(\bar{z}_1 z_2),$$

$$|z_1||z_2|\cos\beta = \Re(\bar{z}_1 z_2),$$

што је и требало доказати.

3. Користимо тригонометријски идентитет $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$, односно:

$$|z_1|^2|z_2|^2\sin^2\beta = |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2|z_2|^2\cos^2\beta =$$

$$= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2$$

$$= x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2$$

$$= (x_1y_2 - y_1x_2)^2 = \Im^2(\bar{z}_1 z_2),$$

$$|z_1||z_2|\sin\beta = \Im(\bar{z}_1 z_2),$$

што је и тражено. □

У аналогији са векторима, можемо дефинисати *скаларни производ* и интензитет *векторског* производа датих комплексних бројева, изразима:

$$z_1 \cdot z_2 = \Re(\bar{z}_1 z_2), \quad |z_1 \times z_2| = \Im(\bar{z}_1 z_2). \tag{1.221}$$

Овим дефиницијама доследно придружимо дефиниције[53] *сложеног збира* и *сложене разлике* комплексних бројева, редом:

$$z_1 \oplus z_2 = \frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2), \quad z_1 \ominus z_2 = \frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2), \tag{1.222}$$

за које је лако проверити да важе једнакости:

$$z_1 \oplus z_2 = \Re(\bar{z}_1 z_2), \quad z_1 \ominus z_2 = i\Im(\bar{z}_1 z_2). \tag{1.223}$$

Први израз (збир) подсећа на „реални производ” комплексних бројева (тј. скаларни производ) из математичке литературе, али у књизи [1] се може видети да у општем случају (који се иначе подразумева) то није тачно.

[53] Називи које сам привремено користио.

1.5 Мишљења

Сирову верзију текста књиге веома су побољшали лектори и рецензенти наведени на почетку. Та је помоћ била значајна и много већа од очекиване, па им се и овом приликом захваљујем. Следе њихове изјаве и мишљења на крају.

Драгана Галић

Ова књига повезује математику, физику, хемију и филозофију. Спомињу се неке идеје које чујем по први пут, а које су тачно математички доказане.

Шта нам то говори?

Да је аутор вероватно на добром путу ка нечем новом, неистраженом ...

Књигу могу користити студенти природних и техничких наука, професори и сви они који се желе упознати са примјеном математике у другим наукама.

Мислим да ће читаоци уживати, срећно!

Драгана Галић, проф. математике,
Гимназија Бања Лука, 6. јун 2017.

Александра Радић

Док се у физици многи темељни појмови и појаве подразумевају, а уз то многи још увек нису разјашњени, у овој књизи нам је дат нови начин објашњења неких од њих, који се великим делом уклапа у већ солидне темеље области попут термодинамике и теорије релативности, али им даје и нову димензију и неочекиване новитете.

Шта је информација и како настаје, која је њена веза са простор-временом, као и неизвесношћу догађаја око нас и ентропијом - само су неки од одговора које ћемо на занимљив и поучан начин открити у овој књизи.

Занимљиво је примећена појава „шкртости” природе на информацијама, која заједно са принципом ентропије и вероватноће логички појашњава загонетне појаве попут Максвеловог демона и Шредингерове мачке, али и интеракција честица и ширење васионе.

Неизвесност - непознато и информација - познато, прво прелази у друго, а док природа преферира оно прво, вероватноћа указује на оно друго, али постоје правила која то регулишу, а она су да је њихова укупност константа у васиони. Међутим, као и много тога, и то је релативно. Свако другачије перцепира исту информацију, из свог положаја.

Још само неке од занимљивости у термодинамици, али и механици, гравитацији, космологији, који проистичу из ових тумачења природе је и природа притиска (али и компоненти силе) и топлоте која се ставља под лупу у добро познатим примерима њене демонстрације и баца нову светлост на релативност ових величина и појава. Сва прича се на крају везује у кохерентну цјелину, која обједињује многе области физике, у многим погледима на, нов, али елегантан и сасвим логичан начин.

Александра Радић, проф. физике,
Гимназија Бања Лука, 13. јун 2017.

Зоран Рајилић

Аутор, који прилично добро разумије физику, сагледава јединство природних појава кроз вјероватноћу, информацију и ентропију. Ипак овај текст доживљавам више као умјетност него као науку.

Гледано строго из угла физике, врло је тешко пратити честе прелазе из подручја у подручје. Рецимо на странама где се објашњава Максвелов демон, Шредингерова мачка, Фајнманов дијаграм. Требало би у тексту пажљивије изградити повезнице тих врло различитих тема.

др Зоран Рајилић
катедра физике
ПМФ Бања Лука, 23. јуни 2017.

* * *

Следеће запажање, мог колеге информатичара Душка Милинчића, толико је опширно колико је и актуелно да сам га морао навести у потпуности. Оно разматра основну идеју ове књиге, објективну случајност, објашњавајући је као аксиому, дакле као нешто што се не може нити доказати нити оспорити, те због чега је разрада исте хитезе у изложеној физици на граници (математичке) фантастике. Међутим, исто показује да је и она друга физика која полази од не прихватања објективне случајности, данас прихваћена, такође фантастична.

О случајности

Читав концепт физике коју аутор промовише у свом раду заснива се на ономе што он назива принцип вјероватноће као и на појму објективне случајности. Ауторова логика ми изгледа беспрекорна, мада признајем да нисам сасвим начисто са појмом објективне случајности. Зато бих овдје покушао да изнесем неке ставове о самом појму случајности, наравно не моје него аутора којег данас многи сматрају највећим ауторитетом на том пољу истраживања. То је Грегори Чејтин (Gregory Chaitin), амерички математичар, а детаљније податке о њему заинтересовани могу наћи на Википедији.

Од многобројних Чејтинових дјела одлучио сам се да овдје представим рад „Случајност и математички доказ“ објављен 1975. год. Треба напоменути да оно чиме се Чејтин заправо бави у скоро свим својим радовима јесте истраживање онога што он зове „границе математике“.

Рад почиње сљедећим ријечима издвојеним као мото: „Иако се случајност може прецизно дефинисати и чак мјерити, за неки дати број се не може доказати да је случајан. Ова енигма успоставља границе онога што је могуће у математици.“

Свако има неку интуитивну представу о томе шта је случајан број. Напр. погледајмо два низа бинарних цифара:

01010101010101010101
01101100110111100010

Први је очигледно конструисан по једноставном правилу; састоји се од броја 01 поновљеног десет пута. Ако би неко нагађао како би се низ могао наставити, могао би са великом увјереношћу предвидјети да ће сљедеће двије цифре бити 0 и 1. Разматрање другог низа цифара не даје никакав свеобухватан образац. Нема очигледног правила

које управља формирањем броја и нема рационалног начина да се претпоставе сљедеће цифре. Поредак изгледа насумичан; другим ријечима, секвенца изгледа као случајно ређање нула и јединица.

Други низ бинарних цифара је генерисан бацањем новчића 20 пута и писањем 1 ако је исход „глава“ и 0 ако је „писмо“. Бацање новчића је класична процедура произвођења случајног броја, и могло би се помислити да управо такво поријекло низа потврђује да је он случајан. Али то није тако. Бацање новчића 20 пута може произвести било који од 2^{20} (мало више од милион) бинарних низова, и сваки од њих има тачно исту вјероватноћу. Стога не би требало бити веће изненађење ако се добије низ са неким очигледним обрасцем него ако се добије неки низ који изгледа случајан; сваки представља догађај са вјероватноћом 2^{-20}. Ако поријекло пробабилистичког догађаја чини једини критеријум случајности, тада се оба низа морају сматрати случајним, а наравно и сви остали, пошто исти механизам може генерисати све могуће низове. Овакав закључак није од помоћи у разликовању случајног од уређеног.

Јасно је да је потребна осјетљивија дефиниција случајности, каква неће противријечити интуитивном концепту броја „без обрасца“. Таква дефиниција је развијена релативно недавно, 60-тих година прошлог вијека. Она не узима у обзир поријекло броја него зависи искључиво од карактеристика секвенце цифара. Нова дефиниција омогућава нам да опишемо особине случајног броја прецизније него што је раније било могуће и успоставља хијерархију степена случајности. Од могућности ове дефиниције можда су још од већег интереса њена ограничења. Посебно, дефиниција не може помоћи да се одреди, осим у врло специјалним случајевима, да ли је или није дати низ цифара, као што је наш други низ, стварно случајан или само изгледа случајан. Ово ограничење није неки пропуст у дефиницији; то је посљедица суптилне али фундаменталне аномалије у темељима математике. Оно је блиско повезано са чувеном теоремом коју је поставио и доказао Курт Гедел 1931 године, а која је постала позната као Геделова теорема о некомплетности. И та теорема и новија открића која се тичу природе случајности помажу да се дефинишу границе које ограничавају извјесне математичке методе.

Алгоритамска дефиниција

Нова дефиниција случајности има своје поријекло у теорији информација, науци која се развила углавном послије другог свјетског рата, а која проучава пренос порука. Претпоставимо да желимо неком послати поруку која ће садржавати таблице вриједности тригонометријских функција. Можемо једноставно превести бројеве у одговарајући код (напримјер бинарне бројеве) и послати их директно, али и најскромније таблице тих функција имају неколико хиљада цифара. Много једноставнији начин да прослиједимо исту информацију био би да пренесемо инструкције за израчунавање тих таблица из одговарајућих тригонометријских формула, као што је Ојлерова једначина

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Таква порука може бити релативно кратка, али у њој ће бити садржане све информације које би се налазиле чак и у највећим таблицама.

Претпоставимо, са друге стране, да желимо пренијети информације о напр. фудбалу. Неко жели да зна резултате свих утакмица прве лиге у посљедњих неколико деценија. У том случају крајње је невјероватно да постоји нека формула која би могла да компримује информације у кратку поруку; у таквом низу бројева свака цифра је у суштини независна јединица информације, и не може се предвидјети ни помоћу сусједних цифара

ни помоћу неког правила. Не постоји никаква алтернатива преношењу читаве листе резултата.

У ове две чудне поруке налази се клица нове дефиниције случајности. Она је заснована на запажању да информација садржана у случајном низу бројева не може бити „компримована", или сведена на компактнију форму. При формулисању стварне дефиниције пожељно је да посматрамо комуникацију не са човјеком већ са дигиталним рачунаром. Човјек може имати способности да извлачи закључке о бројевима или да конструише низове од дјелимичне информације или на основу магловитих инструкција. Рачунар нема те способности и за нашу сврху тај недостатак је предност. Инструкције дате рачунару морају бити комплетне и експлицитне, и морају му омогућити да ради корак по корак без захтјева да разумије резултат било ког дијела операција које изводи. Такав скуп инструкција је алгоритам. Од њега се може тражити да изведе било који коначан број механичких манипулација бројевима, али се не може тражити да просуђује о њиховом значењу.

Дефиниција такође захтијева да буде могуће мјерење информационог садржаја поруке на неки прецизан начин. Фундаментална јединица информације је „бит", кога можемо дефинисати као најмању јединицу информације која је у стању да индицира избор између две једнако вјероватне ствари. У бинарној нотацији један бит је еквивалентан једној цифри, 0 или 1.

Сада смо у стању да прецизније опишемо разлике између два низа цифара са почетка овог текста:

01010101010101010101
01101100110111100010

Први се може специфицирати рачунару помоћу врло једноставног алгоритма, напримјер „Испиши 01 десет пута". Ако би низ био проширен по истом правилу, алгоритам би био само мало већи; напримјер „Испиши 01 милион пута". Број бита у таквом алгоритму је мали дио броја бита у низу који специфицира, а како се низ повећава величина алгоритма (програма) расте много спорије.

За други низ цифара нема одговарајуће пречице. Најекономичнији начин да се изрази тај низ је да се испише у цјелини, а најкраћи алгоритам за уношење низа у рачунар био би „Испиши 01101100110111100010". Ако би низ био много дужи (али још увијек очигледно без обрасца), алгоритам би морао бити проширен до одговарајуће дужине. Ова „нестишљивост" је особина свих случајних бројева. Сада можемо директно наставити да дефинишемо случајност у смислу нестишљивости: Низ бројева је случајан ако најмањи алгоритам који је у стању да тај низ специфицира рачунару има исти (или скоро исти) број бита информације као и сам низ.

Ову дефиницију су независно предложили око 1965. године А.Н. Колмогоров из Академије наука Совјетског Савеза и Грегори Чејтин који је тада био студент на City College-у у Њујорку. Ниједан од њих двојице тада није знао за сличан приједлог који је 1960. године дао Реј Соломонов (Ray J. Solomonoff) из Zator Company покушавајући да измјери једноставност научних теорија. Наредних година настављена су истраживања значења случајности. Изворне формулације су побољшане и исправност тог приступа је снажно потврђена.

Модел индуктивне методе

Алгоритамска дефиниција случајности поставља нове темеље теорије вјероватноће. Она ни у ком случају не потискује класичну теорију вјероватноће, која је заснована на ансамблу могућности гдје је свакој могућности додијељена вјероватноћа. Заправо, алгоритамски приступ је комплементаран методу ансамбла тако што даје прецизно

значење концептима који су били интуитивно привлачни али нису могли бити формално прихваћени.

Класична теорија вјероватноће, која потиче из 17-ог вијека, остаје и данас од велике практичне важности. Она чини темељ статистике, а примјењује се и у многим другим областима науке и технике. Алгоритамска теорија такође има важне импликације, али су оне првенствено теоријске. Овдје је област од највећег интереса проширење Геделове теореме о некомплетности. Друга примјена (која је заправо претходила формулацији саме теорије) је у Соломоновљевом моделу научне индукције.

Соломонов је представио научне опсервације као низ бинарних цифара. Научник тежи да објасни ове опсервације преко неке теорије, што се може посматрати као неки алгоритам који је у стању да генерише тај низ и да га прошири, тј. да предвиди будуће опсервације. За сваки дати низ опсервација увијек постоји неколико теорија које се „такмиче“ једна с другом, а научник мора изабрати једну од њих. Овај модел захтијева да најмањи алгоритам, онај који се састоји од најмање бита, буде изабран. Речено на други начин, ово правило је слично формулацији Окамове (Occam) бритве: Ако имамо више теорија очигледно једнаке вриједности, преферирамо најједноставнију.

Стога, у Соломоновљевом моделу, теорија која нам омогућује да схватимо неки низ опсервација се види као мали рачунарски програм који репродукује опсервације и даје предвиђања о могућим будућим опсервацијама. Што је програм мањи, то је теорија свеобухватнија и већи је степен разумијевања. Опсервације које су случајне не могу се репродуковати помоћу малог програма и стога се не могу објаснити помоћу теорије. Поред тога, будуће понашање случајног система се не може предвидјети. За случајне податке, најкомпактнији начин за неког научника да саопшти своје опсервације јесте да их објави у њиховој цјелини.

Избор одређеног рачунара можемо сматрати небитним питањем, па стога за наша израчунавања можемо изабрати идеални рачунар. За њега претпостављамо да има неограничен капацитет меморије и неограничено вријеме да заврши своја израчунавања. Улаз и излаз из рачунара су у форми бинарних цифара. Машина почиње да ради чим јој се да програм, и наставља да ради док не заврши исписивање бинарног низа који је резултат. Машина се затим зауставља. Уколико нема грешке у програму, рачунар ће произвести тачно један излаз за сваки дати програм.

Минимални програми и комплексност

Било који низ бројева може се генерисати помоћу бесконачног броја алгоритама. Међутим, од највећег интереса су они најмањи који ће произвести дати нумерички низ. Најмањи програми се називају минимални програми; за дати низ може постојати један минимални програм или их може бити више.

Било који минимални програм је нужно случајан, без обзира да ли је низ којег генерише случајан или не. Овај закључак је директан резултат начина на који смо дефинисали случајност. Посматрајмо програм P, који је минимални програм за низ цифара S. Ако претпоставимо да P није случајан, тада по дефиницији мора постојати други програм, P', значајно мањи од P који ће га генерисати. Тада можемо произвести S помоћу сљедећег алгоритма: „Из P' израчунај P, затим из P израчунај S“. Овај програм је само неколико бита дужи од P', и стога мора бити значајно краћи од P. P дакле није минимални програм.

Минимални програм је блиско повезан са другим фундаменталним концептом алгоритамске теорије случајности: концептом комплексности. Комплексност низа цифара је број бита који се морају убацити у рачунар да би се добио изворни низ као излаз. Комплексност је дакле једнака величини у битима минималних програма низа. Пошто

смо увели овај концепт, сада можемо поново изрећи нашу дефиницију случајности на ригорознији начин: Случајан низ цифара је онај чија комплексност је приближно једнака његовој величини у битима.

Појам комплексности служи не само да дефинише случајност него такође и да је мјери. За датих неколико низова бројева од којих сваки има n цифара, теоријски је могуће идентификовати све оне са комплексношћу $n-1$, $n-10$, $n-100$ итд. и тако рангирати низове по опадајућем степену случајности. Тачна вриједност комплексности испод које се низ више не сматра случајним остаје донекле арбитрарна. Та вриједност треба бити постављена довољно ниско да бројеви са очигледно случајним особинама не би били искључени и довољно високо да би бројеви са јасно израженим обрасцем били дисквалификовани, али поставити одређену нумеричку вриједност значи процијенити који степен случајности чини стварну случајност. Управо се та несигурност одражава у квалификованој тврдњи да је комплексност случајног низа *приближно* једнака величини низа.

Особине случајних бројева

Методе алгоритамске теорије вјероватноће могу разјаснити многе особине и случајних и неслучајних бројева. Напримјер, може се показати да расподјела учестаности цифара у низу има важан утицај на случајност низа. Једноставан увид сугерише да је низ који се састоји само од 0 или 1 далеко од случајног, а алгоритамски приступ потврђује овај закључак. Ако такав низ има дужину од n цифара, његова комплексност је приближно једнака логаритму по бази 2 од n. (Тачна вриједност зависи од машинског језика који је кориштен.) Низ се може произвести једноставним алгоритмом као што је „Испиши 0 n пута“, гдје су заправо све потребне информације садржане у бинарном броју за n. Величина овог броја је око $\log_2 n$ бита. Пошто је чак и за умјерено дугачке низове логаритам од n много мањи него само n, такви бројеви имају ниску комплексност; њихов интуитивно перципирани образац је математички потврђен.

Други бинарни низ који се може успјешно анализирати на овај начин је онај гдје су 0 и 1 присутни са релативним учестаностима од 3/4 и 1/4. Ако је низ дужине n, може се показати да његова комплексност није већа од 4/5 од n, тј., програм који ће произвести низ може бити написан са $4n/5$ бита. Овај максимум важи без обзира на секвенцу цифара, тако да нема низа са оваквом расподјелом учестаности који би се могао сматрати врло случајним. Заправо, може се доказати да у било којем дугачком бинарном низу који је случајан релативне учестаности 0 и 1 морају бити врло близу 1/2. (У случајним децималним низовима релативна учестаност сваке цифре је, наравно, 1/10.)

Бројеви који имају неслучајну расподјелу учестаности су изузетак. Напримјер, од свих могућих n-цифрених бинарних бројева постоји само један који се сав састоји од 0 и само један који се сав састоји од 1. Сви остали су мање уређени, и огромна већина мора, по сваком разумном стандарду, бити сматрана случајним. Да бисмо изабрали неку арбитрарну границу, можемо израчунати који дио од свих n-цифрених бинарних бројева има комплексност мању од $n-10$. Постоје 2^1 програма дужине једне цифре који могу генерисати n-цифрени низ; постоје 2^2 програма дужине две цифре који могу дати такав низ, 2^3 програма дужине три цифре итд., све до најдужих програма допуштених унутар дозвољене комплексности; таквих има 2^{n-11}. Сума овог низа $(2^1+2^2+\cdots+2^{n-11})$ је једнака $2^{n-10}-2$. Дакле постоји мање од 2^{n-10} програма величине мање од n^{-10}, а пошто сваки од ових програма може специфицирати не више од једног низа цифара, мање од 2^{n-10} од 2^n бројева има комплексност мању од $n-10$. Пошто је $2^{n-10}/2^n = 1/1024$, слиједи да од свих n-цифених бинарних бројева само око један од 1000 има комплексност мању

од $n - 10$. Другим ријечима, само око једног низа од 1000 може бити компримовано у рачунарски програм који је за више од 10 цифара мањи од њега самог.

Нужна посљедица овог израчунавања је да више од 999 од сваких 1000 n-цифрених бинарних бројева има комплексност једнаку или већу од $n - 10$. Ако се овај степен комплексности може узети као прикладан тест случајности, тада су готово сви n-цифрени бројеви заправо случајни. Ако се фер новчић баци n пута, вјероватноћа је већа од $0,999$ да ће резултат до те мјере бити случајан. Стога изгледа као да је лако показати примјерак дугог низа случајних цифара; заправо то је немогуће учинити.

Формални системи

Може се лако показати да одређени низ цифара није случајан; довољно је да нађемо програм који ће генерисати тај низ и да он буде значајно мањи од самог низа. Програм не мора нужно бити минимални програм за тај низ; довољно је само да буде мали. Са друге стране, да би се показало да је одређени низ цифара случајан, морамо доказати да не постоји мали програм који га израчунава.

У свијету математичких доказа Геделова теорема о некомплетности представља изузетан оријентир. Чејтинова верзија ове теореме предвиђа да *тражени доказ случајности не може бити пронађен.* Посљедице ове чињенице су једнако интересантне због онога што откривају о Геделовој теореми као и због онога што индицирају о природи случајних бројева.

Геделова теорема представља разрешење контроверзи које су преокупирале математичаре током раних година 20-ог вијека. Питање је гласило: „Шта чини валидни доказ у математици и како се такав доказ може препознати?“ Давид Хилберт је покушао да ријеши ову контроверзу развијајући вјештачки језик у којем би валидни докази могли бити налажени механички, без било какве потребе за људским увидом или процјеном. Гедел је показао да такав савршен језик не постоји.

Хилберт је установио коначни алфабет симбола, недвосмислену граматику која специфицира како се може формирати смислена тврдња, коначну листу аксиома или почетних претпоставки, и коначну листу правила закључивања за дедукцију теорема из аксиома или других теорема. Такав језик, са својим правилима, се назива формални систем.

Формални систем је дефинисан тако прецизно да доказ може бити изведен помоћу рекурзивне процедуре која укључује само једноставне логичке и аритметичке манипулације. Другим ријечима, у формалном систему постоји алгоритам за тестирање валидности доказа. Данас, што није било могуће у Хилбертово вријеме, алгоритам би се могао извршити на дигиталном рачунару и од машине би се могло тражити да „процијени“ ваљаност доказа.

Због Хилбертовог захтјева да формални систем има алгоритам за провјеру доказа, теоријски је могуће да излистамо, једну по једну, све теореме које се могу доказати у одређеном систему. Прво излистамо по алфабетском реду све секвенце симбола које су дужине једног карактера и примијенимо алгоритам за тестирање доказа на сваку од њих, чиме налазимо све теореме (ако их има) чији се докази састоје од једног карактера. Затим тестирамо све двокарактерне секвенце симбола, итд. На овај начин се могу провјерити сви потенцијални докази, и на крају се могу открити све теореме по реду величине њихових доказа. (Овај метод је, наравно, само теоријски; процедура је исувише дугачка да би била практична.)

Недоказиве тврдње

Гедел је показао у свом доказу из 1931 године да Хилбертов план за комплетну систематску математику не може бити испуњен. Он је ово учинио тако што је констру-

исао тврдњу о позитивним цијелим бројевима у језику формалног система која је тачна али не може бити доказана у систему. Формални систем, без обзира колико је велик или пажљиво конструисан, не може обухватити све тачне теореме и стога је некомплетан. Геделова техника се може примијенити на практично било који формални систем, што доводи до изненађујућег и, за многе, неугодног закључка да не може постојати дефинитиван одговор на питање „Шта је валидан доказ?“

Геделов доказ теореме о некомплетности је заснован на парадоксу Епименида Крићанина, који је наводно рекао: „Сви Крићани су лажови“. Овај парадокс се може изрећи на општији начин као „Ова тврдња је нетачна“, што је исказ који је тачан ако и само ако је нетачан, па стога није ни тачан ни нетачан. Гедел је замијенио концепт истинитости са концептом доказивости и тако конструисао реченицу „Ова тврдња је недоказива“, што је исказ који је, у одређеном формалном систему, доказив ако и само ако је нетачан. Зато, или је нетачност доказива, што је забрањено, или је тачна тврдња недоказива, па је стога формални систем некомплетан. Гедел је затим примијенио технику која јединствено нумерише све тврдње и доказе у формалном систему и тако конвертује реченицу „Ова тврдња је недоказива“ у исказ о особинама позитивних цијелих бројева. Зато што је таква трансформација могућа, теорема о некомплетности се једнако убједљиво примјењује на све формалне системе у којима је могуће радити са позитивним цијелим бројевима.

Блиска повезаност између Геделовог доказа и теорије о случајним бројевима може се објаснити преко другог парадокса, по форми сличног Епименидовом парадоксу. То је варијанта Беријевог (Berry) парадокса, којег је први објавио Бертранд Расел 1908 године. Он гласи: „Нађи најмањи позитивни цијели број који да би био одређен захтијева више карактера него што их има у овој реченици.“ Ова реченица има (у оригиналу на енглеском језику) 114 карактера (бројећи размаке између ријечи и тачку на крају, али не и знакове навода), а ипак наводно одређује цијели број који, по дефиницији, захтијева више од 114 карактера да би био одређен.

Као и раније, да бисмо примијенили парадокс на теорему о некомплетности неопходно је да га премјестимо из свијета истинитости у свијет доказивости. Фраза „који захтијева“ мора бити замијењена са „за који се може доказати да захтијева“, што значи да ће све тврдње бити изражене у одређеном формалном систему. Такође, магловити појам „број карактера потребан да се одреди цијели број“ може бити замијењен прецизно дефинисаним концептом комплексности, који се мјери у битима, а не у карактерима.

Резултат ових трансформација је сљедећи рачунарски програм: „Нађи низ бинарних цифара за који се може доказати да ће бити веће комплексности од броја бита у овом програму.“ Програм тестира све могуће доказе у формалном систему по реду њихове величине док не наиђе на први који доказује да одређена бинарна секвенца има комплексност већу од броја бита у програму. Тада исписује низ који је пронашао и зауставља се. Наравно, парадокс у тврдњи из које је изведен програм није елиминисан. Програм наводно израчунава број који ниједан програм његове величине не би требао бити у стању да израчуна. Заправо, програм налази први број за који се може доказати да се не може наћи.

Апсурдност овог закључка само показује да програм никада неће наћи број за који је направљен да га тражи. У формалном систему не може се доказати да одређени низ цифара има комплексност већу од броја бита програма који је кориштен да специфицира тај низ.

Могуће је направити и даље генерализације око овог парадокса. Није број бита у самом програму тај који је ограничавајући фактор, већ број бита у формалном систему

као цјелини. Скривени у програму су аксиоми и правила закључивања која одређују понашање система и обезбјеђују алгоритам за тестирање доказа. Информациони садржај ових аксиома и правила може се мјерити и може означавати комплексност формалног система. Величина читавог програма стога превазилази комплексност формалног система за фиксни број бита c. (Стварна вриједност c зависи од кориштеног машинског језика.) Теорема доказана помоћу парадокса може се дакле исказати на сљедећи начин: У формалном систему комплексности n немогуће је доказати да одређени низ бинарних цифара има комплексност већу од $n + c$, гдје је c константа која је независна од тога који је систем употријебљен.

Границе формалних система

Пошто је комплексност дефинисана као мјера случајности, ова теорема имплицира да се у формалном систему ни за један број не може доказати да је случајан осим ако је комплексност тог броја мања од оне самог система. Како су сви минимални програми случајни теорема такође имплицира да је потребан систем веће комплексности да би се доказало да је програм минималан за одређени низ цифара.

Комплексност формалног система има веома велику тежину у доказивању случајности зато што је то мјера количине информација које систем садржи, па зато и количине информација које се могу извести из њега. Формални систем почива на аксиомима: фундаменталним тврдњама које су несводиве у истом смислу као што је то и минимални програм. (Ако би неки аксиом могао бити изражен на компактнији начин, тада би та краћа тврдња постала нови аксиом, а стара тврдња би постала изведена теорема.) Информације утјеловљене у аксиомима су стога и саме случајне, и могу бити кориштене да тестирају случајност других података. Случајност неких бројева се дакле може доказати, али само ако су они мањи од формалног система. Поред тога, сваки формални систем је нужно коначан, док се било који низ цифара може учинити произвољно великим. Стога ће увијек постојати бројеви чија се случајност не може доказати.

Подухват дефинисања и мјерења случајности је увелико појаснио важност и импликације Геделове теореме о некомплетности. Та теорема се сада види не као неки изоловани парадокс него као природна посљедица ограничења која је поставила теорија информација. Херман Вајл (Hermann Weyl) је 1946 године рекао да је сумња коју су посијала таква открића као што је Геделова теорема била „константан удар на ентузијазам и одлучност са којима сам и ја кренуо у свој истраживачки рад.“ Са тачке гледишта теорије информација, међутим, Геделова теорема не даје разлога за депресију. Умјесто тога она изгледа да једноставно сугерише да би математичари да би напредовали, попут истраживача у другим наукама, морали трагати за новим аксиомима.

Душко Милинчић, ел. инжењер,
Гимназија Бања Лука, 25. јун 2017.

* * *

Следеће мишљење је дао лектор Горан Дакић, иначе професор српског језика и књижевности. Аутор је романа „Даљ“ који је недавно проглашен најбољим романом објављеним те године у Републици Српској, а након пар година Дакић је проглашен најбољим новинаром у Босни и Херцеговини. Познат је по оштрим нападима на актуелну политику. Он је и у свом коментару овде остао доследан себи и опет пронашао политику, али зачудо, на начин на који сам је и ја негде поменуо.

Стање веће вјероватноће

У предговору књиге „Простор-време“ Растко Вуковић помиње, између осталих, Да Винчија, Паскала и Теслу који су, сваки на свој начин, пркосили академијама и научној интелигенцији свога времена. Тај пркос ће, вијековима касније, српски пјесник Станислав Винавер срочити у цинични афоризам: „Треба ведро презирати“ и тиме ће показати да је дух генија слободан тачно онолико колико катедре нису и никада неће бити. Та врста презира и пркоса својствена је онима који виде даље у времену; такви не маре за звања, њих не интересују каријере, с лакоћом се одричу титула. Геније или онај који трага за њиме гори у ватри идеје, све остало за њега је тек јутарња, јануарска жар на којој се ледени прсти не могу огријати.

Готово је извјесно да не знам ништа о Лоренцовим трансформацијама и о теорији скупова, али понешто о нашим академијама и академцима ипак знам. Небројено много пута сам констатовао да се код нас оргиналност научног рада мјери цитатима и фуснотама; што више навођења, што више позивања на друге ауторе и туђа истраживања – то је научни рад оригиналнији! Парадокс је, наравно, очигледан, али то нико не види или је све заправо дио веће игре. Годинама сам се исмијавао научним радовима или чак дисертацијама које су истраживале и анализирале акумулацију првобитног капитала у Дефоовим романима, али сада видим да су исти ти направили завидне академске каријере на основу псеудонаучних трућања. У таквом поретку ствари мјеста за оригиналне нема. Уосталом, сјетите се како је прошао Ајнштајн са појединим открићима која су тек касније, након његове смрти, слављена као револуционарна.

Наше високо образовање је такво какво је: да би млади научник постао доцент потребан му је извјестан број научних радова, један магистар, учешћа на међународном скуповима; пет година касније научник више није толико млад, али га каријера чека и даље и пред њим је звање ванредног професора, а за то је потребно два пута више радова„ два пута више скупова и један или два уџбеника, односно монографије; но, наш научник, који сада сањиво гледа уназад и пита се гдје су му и у шта прошле године, пред собом има још један редовни циљ, а он је, дабоме, и најтежи... У таквом поретку ствари, јасно је, мјеста за оригиналност нема. Идеју су убиле догма и бирократија. Уосталом, постоји та анегдота према којој је Ајнштајн остао без одређене научне титуле јер није био довољно оригиналан. Оне који су о томе одлучивали нико више не помиње, чак ни у фусноти.

Оригиналност Вуковићеве књиге је наупитна; као писац и новинар могу да пратим њену филозофску страну; о оној математичкој и физичкој мораће други да суде и пресуђују. Вјерујем да су његови ставови тачни, али не зато што их разумијем у коначници, већ зато што су његови потенцијални рецензенти одбијали да препоруче књигу издавачу уз лабав аргумент: Све је то тачно, али ниси у праву! Увјерења достојна фанатика. Вуковић је јеретик; он ни у шта не вјерује, јер напросто ни у шта не мора да вјерује. Ако нешто није тачно, онда није тачно и нема тог департмана који може да докаже да је другачије. То је, чини ми се, Вуковићев мото. Драге су ми колеге, али ми је истина дража, вели Вуковић и на томе се прича завршава. Нама млађима, како би рекао проф, остаје да видимо да ли ће га цитирати за коју деценију као што данас цитирају Лајбница.

Академци не вјерују у идеју; идеја је све у шта Вуковић вјерује. У томе је, наиме, разлика.

Горан Дакић, новинар,
Бања Лука, 19. јул 2017.

Димитрије Чвокић

Аутор је у свом рукопису представио својеврсну изградњу погледа на физички свијет која за основу узима такозвану објективну случајност. Напоменуо бих да је дати „крејеугаони” појам у овом тексту на неки начин увео сам Хајзенберг, и то давне 1958. г. У суштини, према Хајзенбергу, објекти немају изричито одређена и непромјенљива својства, тј. постоје само њихове вјероватносне карактеризације. Таласна функција квантне механике се може посматрати као јединствен спознајни записник о неком физичком систему и у исто вријеме као цјелокупан (али вјероватносни) опис свих исхода у неким будућим огледима. Јасно је да се из овога објективна случајност непосредно изводи, и да је видно у блиском родству са концептом на који се позива аутор. Посматрано из угла савремене квантне механике, као да је направљена мала рокада. Почиње се од случајности (и то објективне), а завршава са описивањем разноврсности дјелимично нам познатог свијета. У томе као да има и нечег метафизичког. Човјек, ухваћен између бескрајно великог и бескрајно малог, из којих ниједно не може да схвати, једино је сигуран у своју несигурност.

Иначе, потрага за првобитним начелима кроз које би се сагледала сва збрка/уређеност и сложеност васионе у којој живимо (и коју проучавамо) није подухват скоријег датума. Занимљиво је да је још Талес из Милета својевремено тврдио да мора постојати једно опште начело које повезује све природне појаве и на основу којег се о њима уопште може и расуђивати. Штавише, био је увјерен да постоји дато начело, или пак првоначелни елемент, из кога је произашла сва твар, те да трагање за тим треба да буде крајњи циљ свих природних наука. Стога, могли бисмо рећи да овдје аутор узима случајност (тј. вјероватноћу) као то начело, и на основу њега уводи још два: начело информације и начело ентропије.

Читајући тумачења и доказе неких добро знаних тврдњи у физици, стиче се утисак да је ријеч о вјероватносном омоту већ познатих детерминистичих приступа у разумијевању свијета око нас и закона који у њему владају. Но, поред приказа како се дата три начела могу искористити за објашњавање и описивање разноразних физичких појава, понуђена су и поприлично једноставна алтернативна тумачења неких шкакљивих мјеста у преовлађујућим теоријама савремене физике. На неки начин, као да на самом дјелу имамо допуну постојеће теорије водећи се Монтењеовим схватањем да постоје двије главне гране философије: догматизам и скептицизам. Догматизам би у неку руку овдје одговарао детерминистичком погледу на свијет, а скептицизам вјероватносном.

Међу разноврсним проблематикама из области физичких наука разматрају се квантна спрегнутост, детерминистички хаос, димензије у физици, природа гравитације, неке тврдње из термодинамике, црвени помак, а даје се и помало другачији пут до основних тврдњи из теорије специјалне релативности. Неке од изведених тврдњи и тумачења сматрам посебно занимљивим, као на примјер оно о утицају будућности на прошлост, мада из текста није јасно да ли аутор ставља нагласак на антикаузалност, акаузалност, мјешавину свега са каузалношћу, или је пак ријеч о нечему четвртом.

Можемо рећи да због комплексности и обрата у својим основним поставкама ова књига представља изазов и кад је ријеч о терминологији, стилу и језику. На почетку се креће од неких општепознатих појмова, и неких занимљивих интерпретација, на основу чега се стиче утисак да би књигу могао читати и лаик. Међутим, убрзо ствари постају много сложеније и много замршеније. Да ли је неке појмове из теоријске физике требало подробније описати, или пак не? Да ли се уопште требало освртати на неке физичке појаве или пак не? Да ли је уопште потребно спомињати Геделове теореме,

које су, нажалост, у посљедње вријеме постале синоним за помодарство? Наравно, све зависи од самог читаоца, но управо је и у томе један од проблема: ко то спада у циљну групу?

Вјерујем да би многим физичарима неке од тврдњи заиста могле заголицати машту, поготово што материја помало личи на Пондишеријско тумачење квантне механике, али и да ће многи од њих бити збуњени улогом (апстрактне) информације у свему томе, као и неким математичким играријама (да их тако назовем). С друге стране, математичар не би требао да има потешкоћа с употребљеним математичким апаратом, улогом информације, разумијевањем прорачуна који се тичу Лоренцових трансформација, али би му позадина проблематике (димензије у физици, струне, гравитација, Карноов циклус, анихилација честице и античестице, итд.) представљале сасвим сигурно одговарајућу психолошку блокаду. Опет, филозоф би, рецимо, прескакао многобројне примјере и математичке доказе разноразних тврђења, и умјесто тога хватао се за њихово тумачење повезујући их са Персовим тихизмом[54], аксиденталиизмом, либертанизмом, супервентношћу, али се у томе, бар према мом мишљењу, налази камен спотицања. С тумачењима треба бити јако обазрив, и ако се не познаје математичка позадина проблематике како треба, може се штошта сумњивог изфантазирати.

Наравно, не сматрам да је због свега овога текст лош. Штавише, могу рећи да се аутор успио колико-толико изборити са свим тим, и искрен да будем, вјероватно боље од мене да сам којим случајем радио на истој проблематици. На неки начин је овдје примјењлива Паскалова мисао: „Посљедње што можемо да упратимо приликом састављања неког дјела јесте шта да се стави на прво мјесто". Из искуства знам да до те „посљедње станице" није баш тако лако доћи. С друге стране, није се лако ухватити у коштац „свијетом", јер знамо да се свијету не може у годити.

За крај, сматрам да је штиво веома занимљиво, јер тјера човјека на неку врсту размишљања о природи, о друштву, али и о неким онтолошким питањима. На примјер, један од проблема који би могли да распале машту би била предочена информацијска „шкртост" (или пак довољност?). Да ли постоји мјера те шкртости? Шта то из „ултимативне неизвјесности" циједи колико-толико нама изразит космос (грч. *κόσμοζ* – уређен свијет)? Гдје је ту поријекло и улога људске личности? Како то да се океан неизвјесности (и неизразитости) подвргава у овом случају крутој и леденој, тј. крајње извјесној и изразитој математици? Шта то заиста значи кад се каже да природа „баш мора"? Постоји ли вријеме времена? Шта би се могло извести када би начелу вјероватности додали, сада већ поприлично разрађен, појам негативне вјероватноће? Другим ријечима, вриједност књиге се не треба одређивати искључиво на кантару тачности, конзистентности, па ни оригиналности изложеног, него током тог процеса треба узети у обзир и питања које би могла да побуди у читаоцима различитих образовних профила. Не сумњиво је да књига Растка Вуковића, поред тога што пружа у неким случајевима једноставне и занимљиве одговоре на многа шкакљива питања савремене физике, омогућује читаоцу да размишља о новим везама, новим прлазима, новим вратима која би требала да воде до научних источника и кладенаца.

мр Димитрије Чвокић
одсјек математике, информатика
ПМФ Бања Лука, 23. август 2017.

[54] Charles Sanders Peirce (1839-1914), амерички филозоф, логичар, математичар и научник који је понекад називан „оцем прагматизма" – примедба аутора.

Душко Јојић

У тексту „ПРОСТОР-ВРЕМЕ“ аутор на нешто више од сто страница говори о занимљивим питањима који повезују теорију вјероватноће, теорију информација и савремену физику.

На почетку се говори о аксиомама вјероватноће, Геделовој теореми и Хајзенберговом принципу неодређености. Касније, аутор посматра природу материје, простора и времена вјешто интерпретирајући познате примјере (парадокс лифта, парадокс лептира и сл.). Од обиља интересантних примјера издвајам (вјероватно из личних афинитета) везу теорије хаоса и Ремзијеве теорије. Прво поглавље завршава са увођењем појма димензије, примјерима симетрије и дискусијом о Ајнштајновој специјалној теорији релативности.

У другој глави аутор почиње са појмом информације и повезује га са аксиомама вјероватноће. Након тога се описују Ојлер-Лагранжове једначине и за неке конкретне проблеме се дају рјешења тих једначина. Као занимљив детаљ из ове главе издвајам причу о улози тензора у Ајнштајновој теорији гравитације.

Трећа глава посматра ентропију и повезује основне концепте термодинамике са вјероватноћом и специјалном теоријом релативности. Користећи принципе теорије вјероватноће из примјера термодинамике аутор изводи закључак да вријеме не постоји без информације!

У посљедњој глави се из Ајнштајнових принципа изводе Лоренцове трансформације, а онда се те трансформације интерпретирају као симетрије. По ауторовим ријечима, ово поглавље је најава његовог будућег рада.

Посматрајући тежину и разноврсност примјера, софистициран математички апарат потребан за описивање тема којима се бави, аутору треба одати признање у вјештини да ова питања приближи обичном читаоцу. То нипошто не значи да је текст лаган за читање. Нажалост, математика је тешка (а физика још тежа!) и схватање појмова важних за разумјевање свијета око нас захтјева труд и напор заинтересованиог читаоца. Ти заинтересовани ће у књизи Растка Вуковића наћи занимљив и изазован текст, елегантно излагање различитих теорија и оригинално тумачење познатих примјера.

др Душко Јојић
катедре геометрије, алгебре
ПМФ Бања Лука, 4. септембар 2017.

Bibliografija

[1] Растко Вуковић: *ПРИРОДА ВРЕМЕНА* - информација материје; Архимед Бања Лука, децембар 2016. (https://www.scribd.com/document/330148833/Priroda-vremena)

[2] Растко Вуковић: *ИНФОРМАЦИЈА ПЕРЦЕПЦИЈЕ* - слобода, демократија и физика; Економски институт Бања Лука, јуни 2016. (https://archive.org/details/Informacija)

[3] Einstein, Albert (1905-06-30). 'Zur Elektrodynamik bewegter Körper' (PDF). Annalen der Physik. 17 (10): 891–921.

[4] John Bell: *On the Einstein–Poldolsky–Rosen paradox*, Physics 1 3, 195-200, Nov. 1964. (http://www.drchinese.com/David/Bell_Compact.pdf)

[5] Knuth, Donald E. (July 1969). "The Gamow-Stern Elevator Problem". Journal of Recreational Mathematics. Baywood Publishing Company, Inc. 2: 131–137. ISSN 0022-412X.

[6] Boeing (2015). 'Chaos Theory and the Logistic Map'. Retrieved 2015-07-16.

[7] Danforth, Christopher M. (April 2013). 'Chaos in an Atmosphere Hanging on a Wall'. Mathematics of Planet Earth 2013. Retrieved 4 April 2013.

[8] Boeing, G. 2016. "Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems: Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction." Systems, 4 (4), 37. doi:10.3390/systems4040037

[9] Hai-Long Zhao: *Lorentz-Covariant Theory of Gravity* Founded on Inertial Frame of Center of Mass, arXiv:gr-qc/0512088, 15 Dec 2005.

[10] Marko Vojinović: *SCHWARZSCHILD SOLUTION IN GENERAL RELATIVITY*, March 2010.

[11] Johannes Droste: http://www.mathpages.com/home/kmath697/kmath697.htm

[12] Boyle's law: https://en.wikipedia.org/wiki/Boyle%27s_law

[13] Maxwell's demon: https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_demon

[14] Schrödinger's cat: https://en.wikipedia.org/wiki/Schr%C3%B6dinger%27s_cat

[15] MM: https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson%E2%80%93Morley_experiment

Indeks



Растко Вуковић фотографисан за матуранте Гимназије марта 2017. године. Поред ове, он је аутор још три књиге о информацији. Прва је „Математичка теорија информације и комуникације” писана пре распада Југославије и штампана после. Затим је објавио „Природу података”, а недавно и „Информацију перцепције”. Пре тих писања завршио је математику на Природно-математичком факултету у Београду, после Гимназије Бања Лука у којој данас ради.